Some Mathematical Requirements

الفصل الأول:

الأنظمة الحركية الخطية المستمرة Linear Continuous Dynamical Systems

المعادلات التفاضلية Differential Equations

المعادلات التفاضلية هي عبارة عن معادلات جبرية تتكون حدودها من مشتقات لدالة لمتغير جبري قابلة للتفاضل فمثلا لو كان $x = f(t)$ فإن التالي معادلات تفاضلية للمتغير $x = f(t)$

$$\frac{dx}{dt} + tx + 3 = 0$$
$$\frac{d^2x}{dt^2} + 5\frac{dx}{dt} - 14x - 10 = 0$$
$$\frac{d^3x}{dt^3} - \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} + x + 2 = 0$$

وتتميز المعادلات التفاضلية بدرجتها Degree وخطيتها Linearity وسوف نتطرق إلى المعادلات من الدرجات الأولى والثانية والخطية. وتحل المعادلات التفاضلية بعدة طرق نستعرض منها ما يناسب مستوى هذا المقرر.

اولا: المعادلات التفاضلية من الدرجة الأولى الخطية:

وهي على الشكل

$$f(t,x)\frac{dx}{dt}+h(t,x)=0$$

حيث $f(t,x)$ و $h(t,x)$ دوال خطية في t و x.

حل معادلات تحوى متغيرات قابلة للفصل:

إذا كانت كل من $f(t,x)$ و $h(t,x)$ يمكن وضعها الشكل

$$f(t,x)=p(t)q(x)$$
$$h(t,x)=r(t)s(x)$$

أي يكون شكل المعادلة التفاضلية هو

$$p(t)q(x)\frac{dx}{dt}+r(t)s(x)=0$$

وعلى شرط ان $s(x)\neq 0$ لجميع قيم x في المجال المعطى و $p(t)\neq 0$ لجميع قيم t في المجال المعطى، بقسمة طرفي المعادلة على $s(x)p(t)\neq 0$ نستطيع فصل المتغيرات كالتالي

$$\frac{q(x)}{s(x)}dx+\frac{r(t)}{p(t)}dt=0$$

ونحصل على الحل بالتكامل المباشر

$$\int\frac{q(x)}{s(x)}dx+\int\frac{r(t)}{p(t)}dt=C$$

حيث C ثابت إختياري يعتمد على الشروط الأولية.

مثال:

حل المعادلة التفاضلية التالية

$$\frac{dx}{dt}-\frac{1-x}{1+t}=0$$

الحل:

نقسم طرفي المعادلة على $1-x$ على شرط أن $x\neq 1$ فنحصل على

$$\frac{1}{1-x}\frac{dx}{dt}-\frac{1}{1+t}=0, \quad x\neq 1$$

بضرب الطرفين في التفاضل dt وترتيب الحدود نجد

$$\frac{dx}{1-x}=\frac{dt}{1+t}, \quad x\neq 1$$

المتغيرات الآن اصبحت مفصولة عن بعضها البعض ويمكن أخذ التكامل لكل طرف

$$\int\frac{dx}{1-x}+\ell n\, C=\int\frac{dt}{1+t}, \quad x\neq 1$$

أو

$$-\ell n\left|1-x\right|+\ell n C=\ell n\left|1+t\right|, x\neq 1$$

أي

$$\left|(1-x)(1+t)\right|=C, x\neq 1$$

ونحل للمتغيرالتابع x بدلالة المتغير المستقل t

$$x=1\pm\frac{C}{1+t},\, x\neq 1$$

مثال آخر:

حل المعادلة التفاضلية التالية

$$t\frac{dy}{dt}-(x-t)=0,\, y\neq 0$$

الدوال $f(t,x)=t,\quad h(t,x)=x-t$ هي دوال متجانسة من الدرجة الأولى (يقال أن الدالة $g(x,y)$ متجانسة من الدرجة n إذا حققت العلاقة $g(kx,ky)=k^n g(x,y)$)

وهذه الحقيقة تساعد في الحل كالتالي:

بتعويض $x=st$ ووضع المعادلة على شكل تفاضلات نجد

$$t(s-1)dt-t(s\,dt+t\,ds)=0,\, t\neq 0$$

بترتيب الحدود بالنسبة للمتغير t والتكامل نجد

$$\int ds=-\int\frac{dt}{t}+C,\, t\neq 0$$

أي

$$s=C-\ell n|t|,\, t\neq 0$$

أو بدلالة المتغير x

$$x=t(C-\ell n|t|),\, t\neq 0$$

المعادلة الخطية من الدرجة الأولى:

ولها الشكل العام

$$\frac{dx}{dt}+P(t)x=Q(t)$$

الحل يعطى بالعلاقة

$$x=Ce^{-\int P(t)dt}+e^{-\int P(t)dt}\int Q(t)e^{\int P(t)dt}dt$$

حيث الحد الأول يسمى الدالة المكملة Complementary Function ويرمز له x_{CF}

والحد الثاني الحل الخاص Particular Solution ويرمز له x_{PS} أي الحل العام يكون

على الشكل $x=x_{CF}+x_{PS}$.

مثال:

حل المعادلة التفاضلية

$$\frac{dx}{dt}+tx=t$$

نوجد الدالة المكملة $x_{CF}=Ce^{-\int P(t)dt}$ وذلك بأخذ $P(t)=t$ فنجد أنها $x_{CF}=Ce^{-\frac{1}{2}t^2}$

والحل الخاص $x_{PS}=e^{-\int P(t)dt}\int Q(t)e^{\int P(t)dt}dt$ حيث $Q(t)=t$ فنجد

$x_{PS}=e^{-\frac{1}{2}t^2}\int te^{\frac{1}{2}t^2}dt=1$ ويكون الحل العام General Solution

$$x = Ce^{-\frac{1}{2}t^2} + 1$$

لاحظ ان الحل العام يحوي ثابت إختياري واحد C. لإيجاد الثابت الإختياري نحتاج إلى شروط أولية Initial Values (IV) لتكن $x=0$ عندما $t=0$ فبالتعويض نجد $0 = C + 1 \Rightarrow C = -1$ ويكون الحل العام تحت الشروط الأولية $x = 1 - e^{-\frac{1}{2}t^2}$.

<u>مثال:</u>

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{1}{t}\frac{dx}{dt} = te^{2t}$$

المعادلة تبدو من الدرجة الثانية ولكن بوضع $y = \frac{dx}{dt}$ نجد

$$\frac{dy}{dt} - \frac{1}{t}y = te^{2t}$$

وهي من الدرجة الأولى في y. يترك حلها كتمرين للطالب.

المعادلات التفاضلية من الدرجات العليا: Higher Order Differential Equations

أولا: المعادلات الخطية بمعاملات ثابتة Linear Equations with Constant Coefficients الحالة المتجانسة Homogeneous Case

وهي على الشكل

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_n x=f(t)$$

سوف نستخدم ترميز خاص لتبسيط شكل المعادلة هو $\dot{x}=\frac{dx}{dt}$ و $\ddot{x}=\frac{d^2x}{dt^2}$ وبشكل عام $x^{(n)}=\frac{d^n x}{dt^n}$ فتصبح المعادلة السابقة على الشكل

$$x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\cdots+a_n x=f(t)$$

وتسمى معادلات تفاضلية بمعاملات خطية ثابتة، حيث $a_1,a_2,...,a_n$ ثوابت (غالبا ماتكون حقيقية). سوف ندرس اولا الشكل المتجانس لهذه المعادلات والتي يكون فيها $f(t)=0$ أي المعادلات على الشكل

$$x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\cdots+a_n x=0$$

لحل هذه المعادلات نجرب الحل $x=Ce^{\lambda t}$ حيث $e^{\lambda t}\neq 0$ ولثابت إختياري C، بالتعويض في المعادلة السابقة ينتج

$$\left(\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n\right)e^{\lambda t} = 0$$

$P(\lambda) \equiv \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n$ تسمى كثيرة الحدود المميزة Characteristic Polynomial. قيم λ المسموح بها هي حلول (أو جذور أو أصفار) المعادلة $P(\lambda) \equiv \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ والتي تسمى المعادلة المساعدة Auxiliary Equation وحيث أن $P(\lambda)$ هي كثيرة حدود من الدرجة n فإن $P(\lambda) = 0$ لها n من الجذور $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ وإذا كانت $a_1, a_2, ..., a_n$ حقيقية فإن هذه الجذور إما ان تكون حقيقية او ازواج من الأعداد المركبة المتقارنة Complex Conjugates . كل من التعابير $x_i = C_i e^{\lambda_i t}, i = 1,2,...,n$ هو حل للمعادلة التفاضلية لثابت إختياري C_i ويكون

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + C_n e^{\lambda_n t}$$

أيضا حلا ويسمي الدالة المكملة Complementary Function وفي حالة المعادلات المتجانسة يكون الحل العام هو الدالة المكملة.

مثال:

حل المعادلة التفاضلية $\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = 0$

الحل:

المعادلة المساعدة $P(\lambda)\equiv\lambda^2+3\lambda+2$ وجذور $P(\lambda)=0$ هي

$\lambda_1=-1,\ \ \lambda_2=-2$ ويكون الحل العام

$$x=C_1e^{-t}+C_2e^{-2t}$$

بثابتين إختياريين يحددان من الشروط الأولية.

حالة تكرار الجذر Repeated Roots :

إذا تكرر جذر مثلا $\lambda=\lambda_1$ عدد r من المرات فإن الحلول المرتبطة بهذا الجذر هي

$$e^{\lambda_1 t},te^{\lambda_1 t},t^2e^{\lambda_1 t},...,t^{r-1}e^{\lambda_1 t}$$

<u>مثال:</u>

حل المعادلة التفاضلية $\dddot{x}+4\ddot{x}+5\dot{x}+2x=0$

الحل:

المعادلة المساعدة $P(\lambda)=\lambda^3+4\lambda^2+5\lambda+2=(\lambda+1)^2(\lambda+2)$ وجذور $P(\lambda)=0$ هي $\lambda_1=-1,\ \lambda_2=-1,\ \lambda_3=-2$ الجذر -1 مكرر مرتين فيكون الحل العام

$$x=C_1e^{-t}+C_2te^{-t}+C_3e^{-2t}$$

أوجد قيم الثوابت الإختيارية للشروط الأولية $x=1, \dot{x}=0, \ddot{x}=1$ عندما $t=0$

من الحل العام نوجد عن طريق التفاضل

$$\dot{x}=-C_1e^{-t}+C_2(1-t)e^{-t}-2C_3e^{-2t}$$
$$\ddot{x}=C_1e^{-t}-C_2(2-t)e^{-t}+4C_3e^{-2t}$$

وبالتعويض بالقيم الأولية نجد

$$C_1+C_3=1$$
$$-C_1+C_2-2C_3=0$$
$$C_1-2C_2+4C_3=1$$

والتي لها الحلول $C_1=-1, C_2=3, C_3=2$ وبالتعويض نحصل على الحل الخاص

$$x=(3t-1)e^{-t}+2e^{-2t}$$

ثانيا: المعادلات الخطية بمعاملات ثابتة Linear Equations with Constant Coefficients الحالة غير المتجانسة Inhomogeneous Case :

الحل العام للمعادلات غير المتجانسة

$$x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\cdots+a_nx=f(t)$$

هو على الشكل $x=x_{CF}+x_{PS}$ حيث x_{CF} يسمى الدالة المكملة Complementary Function و x_{PS} يسمى الحل الخاص Particular Solution.

لقد رأينا في الفقرة السابقة كيفية إيجاد الدالة المكملة، وسوف نستعرض الآن إيجاد الحل الخاص.

طرق إيجاد الحل الخاص:

طريقة العامل D:

تعريف: عامل التفاضل D ويعرف بالعلاقة $D\equiv\frac{d}{dt}$ فمثلا $D^2\equiv\frac{d^2}{dt^2}$ و $D^n\equiv\frac{d^n}{dt^n}$.

نعرف عامل كثيرة الحدود Polynomial Operator

بالعلاقة $P(D)\equiv D^n+a_1D^{n-1}+\cdots+a_n$

$$\begin{aligned}P(D)\,f(t)&\equiv\left(D^n+a_1D^{n-1}+\cdots+a_n\right)f(t)\\&=f^{(n)}(t)+a_1f^{(n-1)}(t)+\cdots+a_nf(t)\end{aligned}$$

حيث $f(t)$ دالة قابلة للتفاضل n مرة (لاحظ أن الحد a_n هو a_nD^0 و $D^0x(t)=x(t)$ أي عامل تفاضل الوحدة).

<u>مثال:</u>

ضع المعادلة التفاضلية التالية على شكل عامل التفاضل D

$$\frac{d^2x}{dt^2}-3\frac{dx}{dt}+2x=te^{-t}$$
$$\ddot{x}-3\dot{x}+2x=te^{-t}$$

<u>الحل:</u>

$$D^2x-3Dx+2x=te^{-t}$$
$$\left(D^2-3D+2\right)x=te^{-t}$$

هنا $P(D)\equiv D^2-3D+2$

<u>خواص عامل التفاضل D :</u>

إذا كان كل من $f(x),g(x)$ دوال قابلة للتفاضل وكان $P(D),Q(D),R(D)$ عمال كثيرات حدود فإن عمال كثيرات الحدود لها الخواص التالية

1) $\left[P(D)+Q(D)\right]f(x)=P(D)f(x)+Q(D)f(x)$

2) $\left[P(D)Q(D)\right]f(x)=P(D)\left[Q(D)f(x)\right]$

3) $D\left(aD^r\right)f(x)\equiv aD^{r+1}f(x)$

4) $P(D)\left[f(x)+g(x)\right]\equiv P(D)f(x)+g(x)f(x)$

5) $P(D)+Q(D)\equiv Q(D)+P(D)$

6) $\left[P(D)Q(D)\right]R(D)\equiv P(D)\left[Q(D)R(D)\right]$

7) $P(D)\left[Q(D)+R(D)\right]\equiv P(D)Q(D)+P(D)R(D)$

8) $(D-\lambda)Q(D)\equiv DQ(D)-\lambda Q(D)$

نظرية التحليل لعوامل The Factorization Theorem

لنفترض أن كثيرة الحدود $\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n$ لها عوامل

$(\lambda-\lambda_1),(\lambda-\lambda_2),\ldots,(\lambda-\lambda_n)$ عندئذ

$$D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_n \equiv (D-\lambda_1)(D-\lambda_2)\cdots(D-\lambda_n)$$

لاحظ ان الطرف الأيمن يمكن ان يستبدل بأي تباديل Permutaion له.

مثال:

$$\ddot{x} + 5\dot{x} + 6x = \cos(t)$$
$$\left(D^2 + 5D + 6\right)x = \cos(t)$$
$$(D+2)(D+3)x = \cos(t)$$
$$(D+3)(D+2)x = \cos(t)$$

مثال: الجذور المنفصلة Distinct Roots

لننظر الى المعادلة العامة من الدرجة الثانية في شكل عواملها

$$(D-\lambda_1)(D-\lambda_2)x = 0, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2$$

عوض $(D-\lambda_2)x = u$ في العلاقة السابقة فتصبح

$$(D-\lambda_1)u = 0$$

أو

$$\frac{du}{dt}-\lambda_1 u=0$$

وهي معادلة تفاضلية متجانسة من الدرجة الأولى في u ولها الحل

$$u=C_1e^{\lambda_1 t}$$

وبالتعويض عن $\left(D-\lambda_2\right)x=u$ نجد

$$\left(D-\lambda_2\right)x=C_1e^{\lambda_1 t}$$
$$\frac{dx}{dt}-\lambda_2 x=C_1e^{\lambda_1 t}$$

وهي معادلة تفاضلية غيرمتجانسة من الدرجة الأولى في x وعلى الشكل

$$\frac{dx}{dt}+P(t)x=Q(t)$$

وحلها هو

$$x=Ce^{-\int P(t)dt}+e^{-\int P(t)dt}\int Q(t)e^{\int P(t)dt}dt$$

حيث $P(t)=-\lambda_2$ و $Q(t)=C_1e^{\lambda_1 t}$ويكون الحل (تترك التفاصيل كتمرين للطلاب)

$$x=\frac{C_1}{\left(\lambda_1-\lambda_2\right)}e^{\lambda_1 t}+C_2e^{\lambda_2 t}$$
$$x=C_1'e^{\lambda_1 t}+C_2e^{\lambda_2 t}$$

مثال: الجذور المكررة Repeated Roots

لنعتبر المعادلة المتجانسة من الدرجة الثالثة

$$\left(D-\lambda_1\right)^2\left(D-\lambda_2\right)x=0$$

بتبديل العوامل ووضع $\left(D-\lambda_1\right)^2 x=u$ ينتج $\left(D-\lambda_2\right)u=0$ والتي حلها $u=C_1e^{\lambda_2 t}$ ويصبح

$$\left(D-\lambda_1\right)^2 x=C_1e^{\lambda_2 t}$$

وبكتابة $\left(D-\lambda_1\right)x=v$ تصبح المعادلة السابقة

$$\left(D-\lambda_1\right)v=C_1e^{\lambda_2 t}$$

والتي لها الحل

$$v=C_1'e^{\lambda_2 t}+C_2e^{\lambda_1 t}$$

واخيرا

$$\left(D-\lambda_1\right)x=C_1'e^{\lambda_2 t}+C_2e^{\lambda_1 t}$$

ومنها نحصل على

$$x=C_1''e^{\lambda_2 t}+\left(C_2x+C_3\right)e^{\lambda_1 t}$$

ملاحظة: على الطالب إكمال التفاصيل للحل.

<u>مثال: الجذور المركبة المتقارنة Complex Conjugate Roots</u>

في حالة وجود جذر مركب للمعادلة $P(\lambda)=0$ التي لها معاملات حقيقية على الشكل $\lambda=\mu+i\nu$ فإننا نعرف ان هناك جذر آخر على الشكل $\lambda=\mu-i\nu$ ويكون شكل الحل الخاص

$$e^{\mu t}\left[C_1\cos(\nu t)+C_2\sin(\nu t)\right]$$

وفي حالة تعددية الجذور m مرة فإن الحل الخاص يكون له الشكل

$$e^{\mu t}\left[P_{m-1}(t)\cos(\nu t)+Q_{m-1}(t)\sin(\nu t)\right]$$

حيث $P_{m-1}(t)$ و $Q_{m-1}(t)$ كثيرات حدود في t من الدرجة $m-1$ ولها ثوابت إختيارية وتضاف هذه الحدود إلى الحدود الأخري التي تنتج من جذور حقيقية للمعادلة $P(\lambda)=0$ لكي تعطي الدالة المكملة x_{CF}.

مثال:

لننظر إلى المعادلة

$$\left(D^5-5D^4+12D^3-16D^2+12D-4\right)x=0$$

وفي شكل عوامل

$$(D-1)(D-1-i)^2(D-1+i)^2x=0$$

العوامل المركبة المتقارنة $\mu=1$ و $\nu=1$ لها تعددية 2 . الدالة المكملة هي

$$x_{CF} = e^t\left[C_1 + \left(C_2 + C_3 t\right)\cos(t) + \left(C_4 + C_5 t\right)\sin(t)\right]$$

كما نلاحظ أن تطبيق العامل D يبسط حل المعادلات بشكل واضح لإيجاد الدالة المكملة ولكن قوة العامل D سوف تتضح اكثر في إيجاد الحل الخاص.

بكتابة معادلة غير متجانسة بالشكل المختصر

$$P(D)x = f(t)$$

والحل الخاص يعطى بالعلاقة

$$x_{PS} = P^{-1}(D)\, f(t)$$

حيث $P^{-1}(D)$ العامل المعكوس ويفسر كالتالي:

ليكن

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = t$$

أو

$$Dx = t$$

بالحل للمتغير x نجد

$$x = D^{-1}t = \frac{1}{2}t^2 + C$$

أي D^{-1} تمثل التكامل مرة واحدة. وكذلك

$$D^2 x = t$$

بإيجاد المعكوس نجد

$$x=D^{-2}t=D^{-1}\left(D^{-1}t\right)$$

وبالتكامل المتكرر نجد

$$x=D^{-2}t=D^{-1}\left(\frac{1}{2}t^{2}+C_{1}\right)=\frac{1}{6}t^{3}+C_{1}t+C_{2}$$

أي أن D^{-r} تعني التكامل المتكرر r مرة.

بما أن $P\left(D\right)$ كثيرة حدود في D فإن $P^{-1}\left(D\right)$ تكون كثيرة حدود في D^{-1} وتكون معكوس $P\left(D\right)$ أي

$$P^{-1}\left(D\right)P\left(D\right)\equiv 1$$

إذا إيجاد الحل الخاص هو ببساطة تطبيق معكوس $P\left(D\right)$ على $f\left(t\right)$ أي $x_{PS}=P^{-1}\left(D\right)f\left(t\right)$ على أن تكون $f\left(t\right)$ قابلة للتكامل.

<u>تعريف: العامل المعكوس Inverse Operator</u>

تأثير العامل المعكوس $\left(D-\lambda\right)^{-1}$ والذي يعمل على دالة $f\left(t\right)$ يعطي بالعلاقة

$$\left(D-\lambda\right)^{-1}f\left(t\right)=e^{\lambda t}\int f\left(t\right)e^{-\lambda t}dt$$

<u>مثال:</u>

أوجد الحل الخاص للمعادلة

$$(D-1)(D-2)x=e^{t}$$

العامل المعكوس هو $(D-2)^{-1}(D-1)^{-1}$ ويكون

$$x=(D-2)^{-1}(D-1)^{-1}e^{t}$$

بتطبيق التعريف السابق علي $(D-1)^{-1}e^{t}$ ينتج

$$(D-1)^{-1}e^{t}=te^{t}$$

ثم تطبق التعريف على $(D-2)^{-1}te^{t}$ ينتج

$$x_{PS}=-(t+1)e^{t}$$

وهو المطلوب.

<u>مثال آخر:</u>

أوجد الحل الخاص للمعادلة

$$(D^{2}-2D+2)x=e^{t}$$

الحل:

بوضع المعادلة على شكل عوامل

$$(D-1-i)(D-1+i)x=e^{t}$$

ونتابع الحل كالتالي:

$$
\begin{aligned}
\left(D-1+i\right)x &= \left(D-1-i\right)^{-1} e^{t} \\
&= e^{\left(1+i\right)t}\int e^{t}e^{-\left(1+i\right)t}dt = ie^{t}
\end{aligned}
$$

وبالتالي يكون

$$
\begin{aligned}
x &= \left(D-1+i\right)^{-1} ie^{t} \\
&= e^{\left(1-i\right)t}\int ie^{t}e^{-\left(1-i\right)t}dt = e^{t}
\end{aligned}
$$

أي ان الحل الخاص هو

$$x_{PS} = e^{t}$$

وهو المطلوب.

الفصل الثاني:

الأنظمة الحركية الخطية المتقطعة Linear Discrete Dynamical Systems

المعادلات الفروقية Difference Equations

المعادلات الفروقية هي عبارة عن معادلات جبرية تتكون حدودها من فروقات لمتغير جبري يأخذ قيم منفصلة فمثلا لو كان $x(t)=x_t, t=0,1,2,...$ فإن التالي معادلات فروقية للمتغير x_t

$$x_t - x_{t-1} - x_{t-2} = 0$$
$$x_t + 2x_{t-1} = 5$$
$$x_t - 3 = 0$$
$$x_t - 3t - 7 = 0$$

تعريف: عامل الإزاحة الخلفي B وله الخواص التالية

$$1)\ Bx_t = x_{t-1}$$
$$2)\ B^2 x_t = B(Bx_t) = B(x_{t-1}) = x_{t-2}$$
$$3)\ B^m x_t = x_{t-m}$$
$$4)\ Bc = c$$
$$5)\ B(cx_t) = cx_{t-1}$$

تعريف: عامل التفريق $\Delta \equiv 1-B$ وله الخواص التالية

$$1)\ \Delta x_t = x_t - x_{t-1}$$
$$2)\ \Delta^2 x_t = \Delta(\Delta x_t) = \Delta(x_t - x_{t-1}) = x_t - 2x_{t-1} + x_{t-2}$$
$$3)\ \Delta^m x_t = \Delta^{m-1}(\Delta x_t)$$
$$4)\ \Delta c = 0$$
$$5)\ \Delta c x_t = c \Delta x_t$$
$$6)\ \Delta(x_t + y_t) = \Delta x_t + \Delta y_t$$

<u>قاعدة:</u>

$$\Delta^m x_t = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} (-1)^{m-j} x_{t-j}$$

هناك عاملين آخرين هما عامل الإزاحة الأمامي $F \equiv B^{-1}$ وعامل التجميع الآنهائي $S \equiv \Delta^{-1}$ والتي سوف نستخدمها وقت الحاجة.

<u>المعادلة الفروقية الخطية من الدرجة الأولى:</u>

وهي على الشكل

$$a_0 x_t + a_1 x_{t-1} = c_t$$

وتكتب ايضا على الشكل

$$x_t = -\frac{a_1}{a_0} x_{t-1} + \frac{c_t}{a_0}$$
$$x_t = A x_{t-1} + C_t$$

حيث $A \neq 0$ وثابتة.

لحل المعادلة $x_t = Ax_{t-1} + C_t$ على فرض ان x_0 معطاة، بوضع $t=1$ نجد

$$x_1 = Ax_0 + C_1$$

ولقيمة $t=2$

$$\begin{aligned} x_2 &= Ax_1 + C_2 \\ &= A\left(Ax_0 + C_1\right) + C_2 \\ &= A^2 x_0 + \left(C_2 + AC_1\right) \end{aligned}$$

ولقيمة $t=3$

$$\begin{aligned} x_3 &= Ax_2 + C_3 \\ &= A\left(A^2 x_0 + \left(AC_1 + C_2\right)\right) + C_3 \\ &= A^3 x_0 + \left(C_3 + AC_2 + A^2 C_1\right) \end{aligned}$$

وبشكل عام

$$x_t = A^t x_0 + \left(C_t + AC_{t-1} + A^2 C_{t-2} + \cdots + A^{t-1} C_1\right)$$

ويصبح الحل

$$x_t = \begin{cases} A^t x_0 + \left(C_t + AC_{t-1} + A^2 C_{t-2} + \cdots + A^{t-1} C_1\right), & \text{if } A \neq 1 \\ x_0 + \sum_{j=1}^{t} C_j, & \text{if } A = 1 \end{cases}$$

إيجاد الحل بالشكل المغلق Closed Form Solution:

$$x_t = Ax_{t-1} + C_t$$

الحل العام يتكون من الدالة المكملة والحل الخاص أي

$$x_t = x_t^{(CF)} + x_t^{(PS)}$$

لإيجاد الدالة المكملة نضع

$$x_t - Ax_{t-1} = 0$$

ثم نعوض $x_t = \lambda^t, \quad \lambda \neq 0$ فنجد

$$\begin{aligned}
&\lambda^t - A\lambda^{t-1} = 0, \quad \lambda \neq 0 \\
&\lambda^{t-1}(\lambda - A) = 0, \quad \lambda \neq 0 \\
&\Rightarrow \quad \lambda - A = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = A
\end{aligned}$$

ويكون $x_t^{(CF)} = G\,A^t$ حيث G ثابت إختياري يحدد من الشروط الأولية.

الحل الخاص $x_t^{(PS)}$ يوجد كالتالي

$$\begin{aligned}
&x_t - Ax_{t-1} = C_t \\
&(1 - AB)x_t = C_t \\
&x_t = (1 - AB)^{-1} C_t \\
&\quad = \begin{cases} (1 - AB)^{-1} C_t & A \neq 1 \\ (1 - B)^{-1} C_t & A = 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

ويكون الحل العام بعد إيجاد الشروط الأولية $G = x_0$ ينتج

$$x_t=\begin{cases} A^t x_0+\left(C_t+AC_{t-1}+A^2C_{t-2}+\cdots+A^{t-1}C_1\right), & \text{if } A\neq 1\\ x_0+\sum_{j=1}^{t}C_j, & \text{if } A=1\end{cases}$$

مثال1:

إذا كانت

$$x_t=2x_{t-1}+1$$

ولقيمة اولية $x_0=5$ نجد

$$\begin{aligned} x_t &= 5\left(2^t\right)+\left(\frac{1-2^t}{1-2}\right)\\ &= 6\left(2^t\right)-1\end{aligned}$$

وبإعطاء t القيم $0,1,2,\ldots$ نجد ان الحل يكون المتتابعة $5,11,23,47,\ldots$.

حل المعادلات الفروقية الخطية من الدرجة الأولى بإستخدام Excel :

حل المعادلات الفروقية تكراريا يمكن القيام بة بواسطة Excel كالتالي:

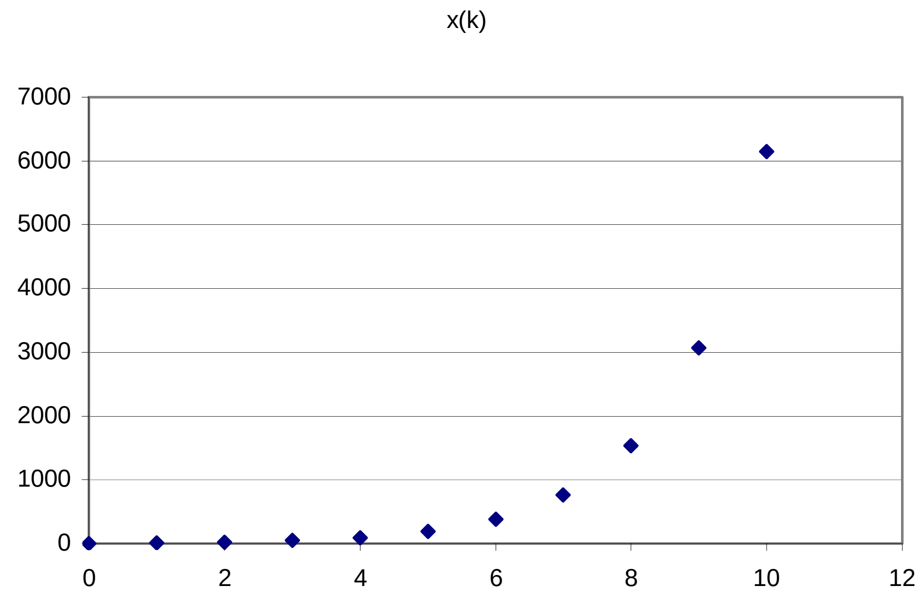
أدخل التالي (الأسطر الأول وحتى الثالث ثم انسخ السطر الثالث حتى المدى المناسب):

	A	B
1	k	x(k)
2	0	5
3	1	=2*B2+1
4	2	=2*B3+1
5	3	=2*B4+1
6	4	=2*B5+1
7	5	=2*B6+1
8	6	=2*B7+1
9	7	=2*B8+1
10	8	=2*B9+1
11	9	=2*B10+1
12	10	=2*B11+1

النتيجة:

	A	B
1	k	x(k)
2	0	5
3	1	11
4	2	23
5	3	47
6	4	95
7	5	191
8	6	383
9	7	767
10	8	1535
11	9	3071
12	10	6143

ولها الشكل التالي:



مثال2:

إذا كانت

$$2x_t - x_{t-1} = 4$$

ولقيمة اولية $x_0 = 3$ نجد

$$x_t = \frac{1}{2}x_{t-1} + 2$$
$$= \left(\tfrac{1}{2}\right)^t 3 + 2\frac{1-\left(\tfrac{1}{2}\right)^t}{1-\left(\tfrac{1}{2}\right)}$$
$$= 4 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^t$$

وبإعطاء t القيم $0,1,2,...$ نجد ان الحل يكون المتتابعة $3, 3\tfrac{1}{2}, 3\tfrac{3}{4}, 3\tfrac{7}{8}, 3\tfrac{15}{16}, ...$.

الحل بإستخدام Excel :

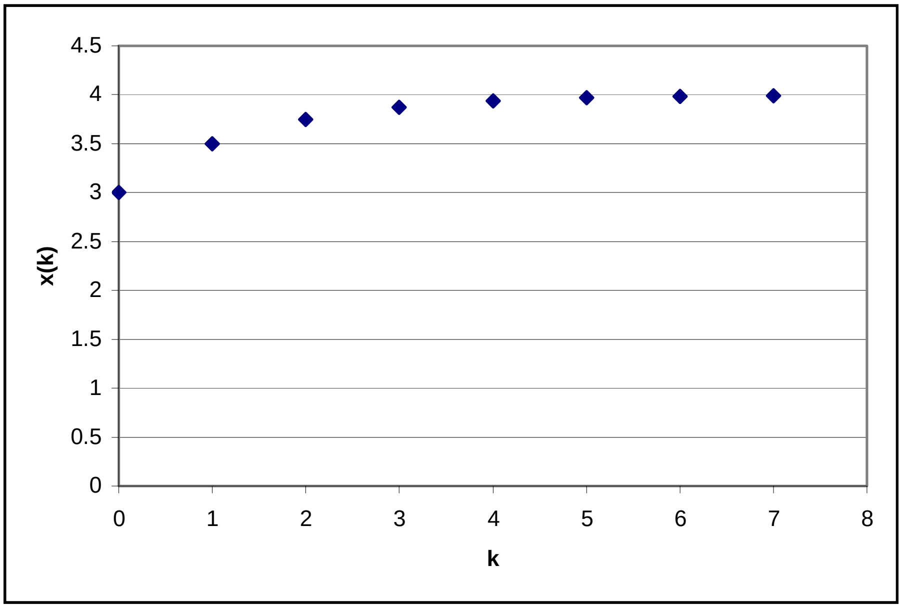
أدخل التالي (الأسطر الأول وحتى الثالث ثم انسخ السطر الثالث حتى المدى المناسب):

	A	B
1	k	x(k)
2	0	3
3	1	=0.5*B2+2

النتيجة

	A	B
1	k	x(k)
2	0	3
3	1	3.5
4	2	3.75
5	3	3.875
6	4	3.9375
7	5	3.96875
8	6	3.984375
9	7	3.992188
10	8	3.996094
11	9	3.998047
12	10	3.999023
13	11	3.999512
14	12	3.999756
15	13	3.999878
16	14	3.999939
17	15	3.999969
18	16	3.999985
19	17	3.999992
20	18	3.999996
21	19	3.999998
22	20	3.999999
23	21	4
24	22	4
25	23	4
26	24	4
27	25	4

ولها الشكل التالي:



مثال3:

إذا كانت

$$x_t + x_{t-1} = 1$$

ولقيمة اولية $x_0 = 1$ نجد

$$\begin{aligned} x_t &= -x_{t-1} + 1 \\ &= (-1)^t + \frac{1-(-1)^t}{1-(-1)} \\ &= \frac{1}{2}\left[1+(-1)^t\right] \end{aligned}$$

وبإعطاء t القيم $0,1,2,...$ نجد ان الحل يكون المتتابعة $1,0,1,0,1,0,...$.

الحل بإستخدام Excel :

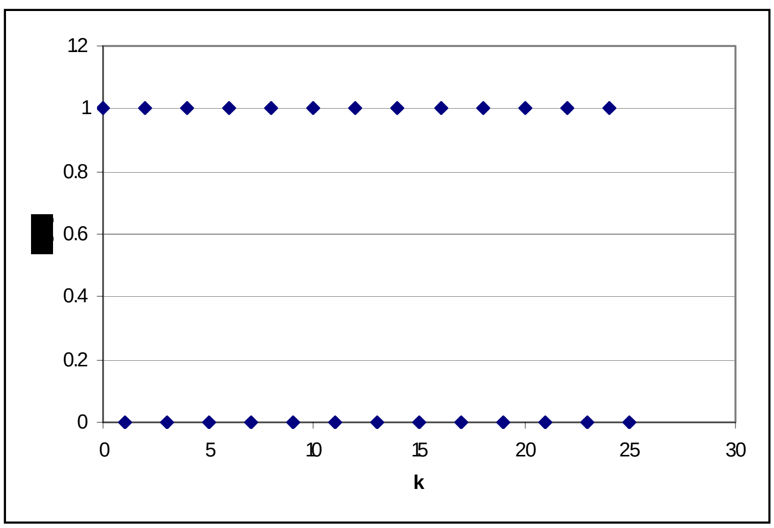
أدخل التالي (الأسطر الأول وحتى الثالث ثم انسخ السطر الثالث حتى المدى المناسب):

	A	B
1	k	x(k)
2	0	1
3	1	=-B2+1

النتيجة

	A	B
1	k	x(k)
2	0	1
3	1	0
4	2	1
5	3	0
6	4	1
7	5	0
8	6	1

ولها الشكل:



مناقشة:

رأينا في الأمثلة السابقة ثلاثة من المعادلات الفروقية كان حل الأولى بالقيمة الأولية المعطاة متتابعة من الأرقام متباعدة، وحل الثانية بالقيمة الأولية المعطاة متتابعة من الأعداد التي تتقارب إلي العدد 4 ، وحل الثالثة بالقيمة الأولية المعطاة متتابعة من رقمين 0 و 1 المتكررة (أي القيم تتذبذب بين 0 و 1).

تمرين: أوجد قيم اولية للمعادلات الفروقية السابقة بحيث تعطي تصرف غير الذي لاحظناه سابقا. بمعنى ماهي القيمة الأولية التي تعطي متتابعة من الأرقام أو الأعداد المتقاربة في المثال1 وهكذا.

تأثير القيم الأولية على المتتابعة الناتجة:

سوف نستعرض تأثير القيمة الأولية على تصرف المتتابعة الناتجة من الحل بالمثال التالي:

مثال4:

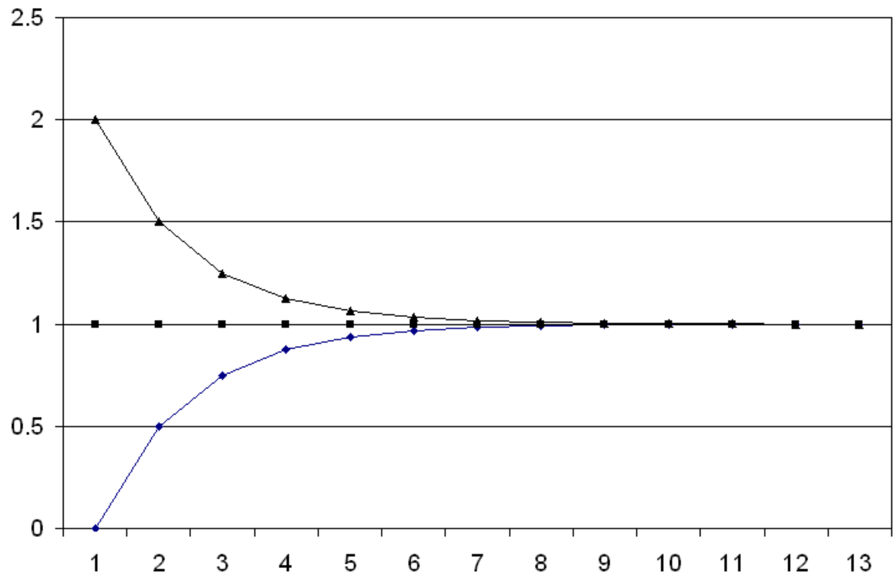
حل المعادلة الفروقية التالية

$$x_t = \frac{1}{2}x_{t-1} + \frac{1}{2}$$

للقيم الأولية $x_0 = 0,1,2$.

الحل بواسطة Excel :

	A	B	C	D
1	k	x(k)	x(k)	x(k)
2	0	0	1	2
3	1	0.5	1	1.5
4	2	0.75	1	1.25
5	3	0.875	1	1.125
6	4	0.9375	1	1.0625
7	5	0.96875	1	1.03125
8	6	0.984375	1	1.015625
9	7	0.992188	1	1.007813
10	8	0.996094	1	1.003906
11	9	0.998047	1	1.001953
12	10	0.999023	1	1.000977
13	11	0.999512	1	1.000488
14	12	0.999756	1	1.000244
15	13	0.999878	1	1.000122
16	14	0.999939	1	1.000061
17	15	0.999969	1	1.000031
18	16	0.999985	1	1.000015
19	17	0.999992	1	1.000008
20	18	0.999996	1	1.000004
21	19	0.999998	1	1.000002
22	20	0.999999	1	1.000001
23	21	1	1	1



نلاحظ ان هناك حل مستقر في كل الحالات إذ تتقارب متتابعة الحل إلى 1.

مثال5:

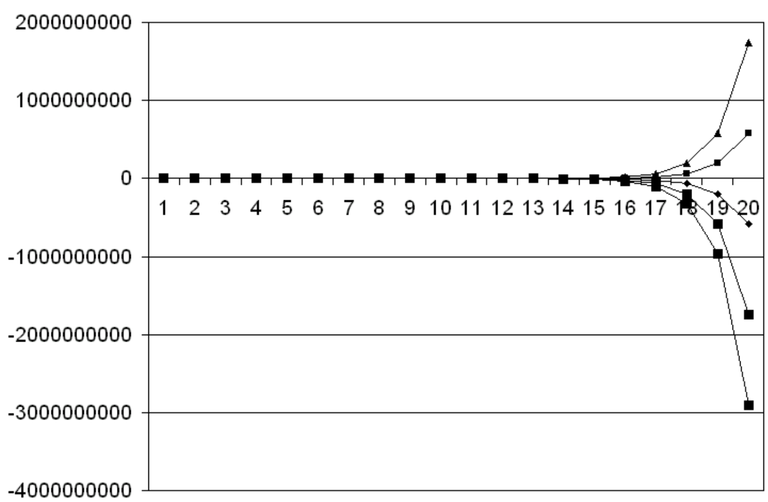
حل المعادلة الفروقية التالية

$$x_t = 3x_{t-1} - 1$$

للقيم الأولية $x_0 = 0,1,2$.

الحل بواسطة Excel :

	A	B	C	D	E	F
1	k	x(k)	x(k)	x(k)	x(k)	x(k)
2	0	0	1	2	-1	-2
3	1	-1	2	5	-4	-7
4	2	-4	5	14	-13	-22
5	3	-13	14	41	-40	-67
6	4	-40	41	122	-121	-202
7	5	-121	122	365	-364	-607
8	6	-364	365	1094	-1093	-1822
9	7	-1093	1094	3281	-3280	-5467
10	8	-3280	3281	9842	-9841	-16402
11	9	-9841	9842	29525	-29524	-49207
12	10	-29524	29525	88574	-88573	-147622
13	11	-88573	88574	265721	-265720	-442867
14	12	-265720	265721	797162	-797161	-1328602
15	13	-797161	797162	2391485	-2391484	-3985807
16	14	-2391484	2391485	7174454	-7174453	-1.2E+07
17	15	-7174453	7174454	21523361	-2.2E+07	-3.6E+07
18	16	-2.2E+07	21523361	64570082	-6.5E+07	-1.1E+08
19	17	-6.5E+07	64570082	1.94E+08	-1.9E+08	-3.2E+08
20	18	-1.9E+08	1.94E+08	5.81E+08	-5.8E+08	-9.7E+08
21	19	-5.8E+08	5.81E+08	1.74E+09	-1.7E+09	-2.9E+09



نلاحظ ان ليس هناك حل مستقر في اي حالة إذ تتباعد متتابعة الحل.

حل المعادلات الفروقية الخطية من الدرجة الثانية:

لننظر إلى المعادلة الفروقية الخطية من الدرجة الثانية الأكثر شهرة وهي التي تعطي متتابعة فيبونتشي Fibonacci الشهيرة لقيم أولية 0 و 1 .

المعادلة

$$x_t - x_{t-1} - x_{t-2} = 0, \quad x_0 = 0, x_1 = 1, t = 0,1,2,...$$

هذه معادلة فروقية خطية متجانسة من الدرجة الثانية ويكون الحل العام هو الدالة المكملة والتي نحاول فيها الحل $x_t = \lambda^t, \lambda \neq 0$ أي

$$\begin{aligned}
&\lambda^t - \lambda^{t-1} - \lambda^{t-2} = 0, \lambda \neq 0 \\
&\lambda^{t-2}\left(\lambda^2 - \lambda - 1\right) = 0, \lambda \neq 0 \\
&\lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \\
&\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}
\end{aligned}$$

ويكون الحل

$$\begin{aligned}
&x_t = A\lambda_1^t + C\lambda_2^t \\
&x_t = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^t + C\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^t
\end{aligned}$$

ومن الشروط الأولية نوجد قيم الثوابت A و C كالتالي

$$x_t = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^t + C\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^t$$
$$x_0 = 0 = A + C$$
$$x_1 = 1 = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + C\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$
$$A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - A\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1$$

$$A\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right] = 1$$
$$\sqrt{5}A = 1 \quad \Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{5}}, C = \frac{-1}{\sqrt{5}}$$

ويكون الحل المغلق هو

$$x_t = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^t + C\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^t$$
$$x_t = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^t - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^t$$
$$x_t = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^t - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^t\right], t = 0,1,2,\ldots$$

تمرين: أوجد x_t لقيم $t = 0,1,2,\ldots,5$. النسبة

$Phi = \Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.6180339887498948482045868343656$ تسمى

النسبة الذهبية Golden Ratio ويرمز لها بالرمز *Phi* ومكملتها يرمز لها بالرمز

phi.

$. phi = \varphi = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 0.6180339887498948482045868343656$

لقرائة ممتعة عن خواص النسبة الذهبية أنظر:

1- http://en.wikipedia.org/wiki/Golden_ratio

2- http://mathworld.wolfram.com/GoldenRatio.html

3- http://www.geom.uiuc.edu/~demo5337/s97b/art.htm

وغيرها كثير وذلك بالبحث في

http://www.google.com/search?q=The+Golden+Ratio

مثال: تكتب نماذج الإنحدار الذاتي من الدرجة الثانية $AR(2)$ على الشكل:

$$x_t - a_1 x_{t-1} - a_2 x_{t-2} = y_t$$

هذه معادلة فروقية خطية غير متجانسة من الدرجة 2.

حل هذه المعادلة يتكون من جزئين

$$x_t = x_t^{(CF)} + x_t^{(PS)}$$

حيث الجزء من الحل $x_t^{(CF)}$ يسمى الدالة المكملة Complementary Function و

الجزء الآخر $x_t^{(PS)}$ يسمى الحل الخاص Particular Solution.

إيجاد الدالة المكملة:

لإيجاد الدالة المكملة نوجد حل للمعادلة المساعدة Auxiliary Function

$$\lambda^2 - a_1\lambda - a_2 = 0$$

والتي تعطي

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\left(a_1 + \sqrt{a_1^2 + 4a_2}\right)$$
$$\lambda_2 = \frac{1}{2}\left(a_1 - \sqrt{a_1^2 + 4a_2}\right)$$

(ملاحظة: لإيجاد المعادلة المساعدة نعوض في المعادلة المتجانسة

$$x_t - a_1 x_{t-1} - a_2 x_{t-2} = 0$$

بـ $x_t = \lambda^t, \lambda \neq 0$ فيصبح

$$\lambda^t - a_1\lambda^{t-1} - a_2\lambda^{t-2} = 0, \lambda \neq 0$$

وبتبسيط هذه المعادلة وذلك بأخذ λ^{t-2} عامل مشترك وحيث أن $\lambda \neq 0$ نحصل على المعادلة المساعدة.)

المعادلة المساعدة السابقة لها حلين λ_1 و λ_2 و وتكون الدالة المكملة أحد الحالات التالية:

1- إذا كانت λ_1 و λ_2 حقيقية ومختلفة فإن

$$x_t^{(CF)} = A\lambda_1^t + C\lambda_2^t$$

2- إذا كانت λ_1 و λ_2 حقيقية ومتساويتين و $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$ فإن

$$x_t^{(CF)} = \left(A + Ct\right)\lambda_0^t$$

3- إذا كانت λ_1 و λ_2 مركبة Complex ومترافقة Conjugate بحيث

$\lambda_1 = r\left[\cos\left(\theta\right) + i\sin\left(\theta\right)\right]$ و $\lambda_2 = r\left[\cos\left(\theta\right) - i\sin\left(\theta\right)\right]$ فإن

$$x_t^{(CF)} = r^t\left[A\cos\left(\theta t\right) + C\sin\left(\theta t\right)\right]$$

حيث في جميع الحالات A وC ثوابت إختيارية تحدد من الشروط الأولية.

<u>حل المعادلة الكاملة وإيجاد الحل الخاص:</u>

الحل الخاص ينتج عن قلب المعادلة

$$x_t - a_1 x_{t-1} - a_2 x_{t-2} = y_t$$

كالتالي:

$$\begin{aligned}
&x_t - a_1 x_{t-1} - a_2 x_{t-2} = y_t \\
&\left(1 - a_1 B - a_2 B^2\right) x_t = y_t \\
&x_t = \left(1 - a_1 B - a_2 B^2\right)^{-1} y_t \\
&x_t = \psi\left(B\right) y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j y_{t-j}, \psi_0 = 1
\end{aligned}$$

وبالتالي يكون

$$x_t^{(PS)} = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j y_{t-j}, \psi_0 = 1$$

ويكون الحل العام كالتالي:

$$x_t = \begin{cases} A\lambda_1^t + C\lambda_2^t + \sum_{j=0}^{\infty}\psi_j y_{t-j} & \lambda_1 \neq \lambda_2 \ \textit{and real}, \psi_0 = 1 \\ (A + Ct)\lambda_0^t + \sum_{j=0}^{\infty}\psi_j y_{t-j} & \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0 \ \textit{and real}, \psi_0 = 1 \\ r^t\left[A\cos(\theta t) + C\sin(\theta t)\right] + \sum_{j=0}^{\infty}\psi_j y_{t-j} & \lambda_1, \lambda_2 \ \textit{complex conjugates}, \psi_0 = 1 \end{cases}$$

حل الحالة الثابتة Steady State Solution:

الجزء من الحل والذي يتكون من الدالة المكملة يسمى أيضا بحالة الإنتقال أو الحالة العابرة Transient State وذلك إذا حققت λ_1 و λ_2 شروط بحيث تجعل

$$\lim_{t\to\infty} x_t^{(CF)} = 0$$

ويصبح الحل العام مساوي للحل الخاص أي

$$x_t = x_t^{(PS)} = \sum_{j=0}^{\infty}\psi_j y_{t-j}, \psi_0 = 1, t \text{ large}$$

حل المعادلة الفروقية من الدرجات العليا:

$$x_t - a_1 x_{t-1} - \cdots - a_n x_{t-n} = y_t - b_1 y_{t-1} - \cdots - b_m y_{t-m}$$
$$\left(1 - a_1 B - \cdots - a_n B^n\right)x_t = \left(1 - b_1 B - \cdots - b_m B^m\right)y_t$$
$$\alpha_n(B)x_t = \beta_m(B)y_t$$

الدالة المكملة هي حلول المعادلة $\alpha_n(B)=0$ ولنفترض أن $\alpha_n(B)$ يمكن تحليلها إلى عوامل كالتالي:

$$\alpha_n(B)=(\lambda_1-B)(\lambda_2-B)\cdots(\lambda_n-B)=0$$

حيث $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ تتكون من جذور حقيقية مختلفة و/أو جذور حقيقية مكررة و/أو جذور مركبة مترافقة. ولنفترض أن هناك $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{n_1}$ من الجذور الحقيقية المختلفة أي $\lambda_1\neq\lambda_2\neq\cdots\neq\lambda_{n_1}$ و $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{n_2}$ من الجذور الحقيقية المكررة أي $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{n_2}=\lambda_0$ و $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{n_3}$ من الجذور المركبة المترافقة (حيث $n_1+n_2+n_3=n$ و n_3 زوجي) فتكون الدالة المكملة على الشكل:

$$\begin{aligned}
x_t^{(CF)} &= A_1x_t^{\lambda_1}+\cdots+A_{n_1}x_t^{\lambda_{n_1}}+\left(C_0+C_1t+\cdots C_{n_2}t^{n_2}\right)x_t^{\lambda_0}\\
&\quad+r_1^t\left[A_1\cos(\theta_1t)+C_1\sin(\theta_1t)\right]+\cdots\\
&\quad+r_{n_3/2}^t\left[A_{n_3/2}\cos\left(\theta_{n_3/2}t\right)+C_{n_3/2}\sin\left(\theta_{n_3/2}t\right)\right]\\
&=\sum_{j=1}^{n_1}A_jx_t^{\lambda_j}+\left(\sum_{j=0}^{n_2}C_jt^j\right)x_t^{\lambda_0}+\sum_{j=1}^{n_3/2}r_j^t\left[A_j\cos\left(\theta_jt\right)+C_j\sin\left(\theta_jt\right)\right]
\end{aligned}$$

والحل الخاص

$$x_t^{(PS)}=\frac{\beta_m(B)}{\alpha_n(B)}y_t$$

حيث يجب أن تكون أصفار $\alpha_n(B) = (\lambda_1 - B)(\lambda_2 - B)\cdots(\lambda_n - B)$ خارج دائرة الوحدة.

حل الحالة الثابتة Steady State Solution:

الجزء من الحل والذي يتكون من الدالة المكملة يسمى أيضا بحالة الإنتقال أو الحالة العابرة Transient State وذلك إذا حققت $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n_1}$ شروط بحيث تجعل

$$\lim_{t \to \infty} x_t^{(CF)} = 0$$

ويصبح الحل العام مساوي للحل الخاص أي

$$x_t = x_t^{(PS)} = \frac{\beta_m(B)}{\alpha_n(B)} y_t, \;\; t \text{ large}$$

تقريب معادلة تفاضلية بمعادلة فروقية:

من الممكن إيجاد حل لمعادلة تفاضلية كنهاية لحل معادلة فروقية تابعة لها. سوف نقتصر المناقشة على المعادلات الخطية من الدرجة الأولى بمعاملات ثابتة. لتكن x دالة معرفة لقيم حقيقية t في فترة $a \le t \le b$ والتي تحقق المعادلة التفاضلية

$$Dx(t) = \frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + C, \quad a \le t \le b$$

حيث $A \ne 0$ و C ثوابت إختيارية ولنفرض أن القيمة الأولية $x_0 = x(a)$ معطاة.

لتقريب هذه المعادلة التفاضلية بمعادلة فروقية تتطلب اولا إستبدال الفترة $a \le t \le b$ بقيم منفصلة يمكن تعريف المعادلة الفروقية عليها. لنأخذ الرقم الصحيح الموجب n ونقسم الفترة من a إلى b إلى n من الأجزاء المتساوية ذات الطول $h = (b-a)/n$ بنقاط التقسيم

$$t_0 = a, \quad t_1 = a + h, \quad t_2 = a + 2h, \ldots, \quad t_n = a + nh = b$$

دعنا نبسط الرموز بكتابة $x_k = x(t_k) = x(t_0 + kh)$.

من المعروف من مقرر التفاضل ان

$$Dx(t_k) = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta x_k}{h}$$

ولهذا يبدوا مناسبا إستبدال المعادلة التفاضلية

$Dx(t) = \frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + C, \quad a \le t \le b$ بالمعادلة الفروقية

$$\frac{\Delta x_k}{h} = Ax_k + C, \quad k = 0,1,2,\ldots,n-1$$

أو

$$x_{k+1} = (1+Ah)x_k + Ch, \quad k = 0,1,2,\ldots,n-1$$

مع الشرط الأولى x_0 معطى. المعادلة الأخيرة هي خطية فروقية من الدرجة الأولى بمعاملات ثابتة وحلها كالسابق

$$x_k = (1+Ah)^k\left(x_0 + \frac{C}{A}\right) - \frac{C}{A}, \quad k = 0,1,2,\ldots,n-1$$

الحالة الخاصة: عندما $C = 0$

وهي حالة لها اهمية وذلك لتطبيقاتها المهمة. المعادلة التفاضلية

$$Dx(t) = \frac{d}{dt}x(t) = Ax(t), \quad a \le t \le b$$

أو معدل التغير اللحظي للدالة x بالنسبة لـ t يتناسب مع الدالة x.

المعادلة الفروقية التقريبية التابعة لها هي

$$x_{k+1} = (1+Ah)x_k, \quad k = 0,1,2,\ldots,n-1$$

والتي حلها

$$x_k = x_0(1+Ah)^k$$

لاحظ ان حل المعادلة التفاضلية هو

$$x(t) = x_0 e^{A(t-t_0)}$$

في حالة $A>0$ ينتج نمو اسي Exponential Growth للدالة x و عندما $A<0$ يحدث تخامد اسي Exponential Decay .

المعادلات الفروقية الخطية بمعاملات ثابتة Linear Difference Equations : with Constant Coefficients

يقال ان معادلة فروقية معرفة على القيم $t = 0,1,2,...$ انها خطية إذا كانت على الشكل

$$f_0(t)x_{t+n} + f_1(t)x_{t+n-1} + \cdots + f_{n-1}(t)x_{t+1} + f_n(t)x_t = g(t)$$

حيث $f_0, f_1, ..., f_{n-1}, f_n, g$ دوال لـ t معرفة على $t = 0,1,2,...$. إذا كانت المعاملات $f_0, f_1, ..., f_n$ كلها ثوابت فإن المعادلة تكون خطية بمعاملات ثابتة (الدلة g لايلزم ان تكون ثابتة او خطية). إذا كانت كل من $f_0 \neq 0$ و $f_n \neq 0$ فإن المعادلة تكون من الدرجة n.

أمثلة:

التالي معادلات فروقية خطية بمعاملات ثابتة

$$\begin{aligned}
&2x_{t+1} - x_t = 6 \\
&3x_{t+2} + 2x_{t+1} + x_t = 3^t \\
&x_{t+3} - x_t = t
\end{aligned}$$

لها درجات 1 و 2 و 3 على الترتيب. عندما تكون $f_0 \neq 1$ فمن الأفضل تقسيم طرفي المعادلة عليها لكي نجعل معامل x_{t+n} مساويا للواحد ويصبح شكل المعادلة

$$x_{t+n} + a_1 x_{t+n-1} + \cdots + a_{n-1}x_{t+1} + a_n x_t = r(t)$$

حيث $a_i = f_i / f_0, \quad i = 1, ..., n; \quad r(t) = g(t)/f_0$.

سوف نستخدم الشكل الأخير للمعادلات الفروقية الخطية بمعاملات ثابتة. سوف نفترض ان $a_1,a_2,...,a_n$ ثوابت وايضا $a_n \neq 0$ والدالة $r(t),\ \ t=0,1,2,...$ دالة إختيارية معرفة على القيم المعطاة. وعلي هذا فالتالي هي معادلات فروقية خطية بمعاملات ثابتة من الدرجات 1 و 2 و 3 على التوالي

$$\begin{aligned}
&x_{t+1}+a_1x_t=r(t)\\
&x_{t+2}+a_1x_{t+1}+a_2x_t=r(t)\\
&x_{t+3}+a_1x_{t+2}+a_2x_{t+1}+a_3x_t=r(t)
\end{aligned}$$

المعادلة

$$x_{t+n}+a_1x_{t+n-1}+\cdots+a_{n-1}x_{t+1}+a_nx_t=0$$

تسمى المعادلة الفروقية الخطية المتجانسة بمعاملات ثابتة والتابعة للمعادلة الفروقية الخطية غير المتجانسة بمعاملات ثابتة

$x_{t+n}+a_1x_{t+n-1}+\cdots+a_{n-1}x_{t+1}+a_nx_t=r(t)$.

<u>نظرية:</u>

إذا كان $x^{(1)}$ و $x^{(2)}$ حلين للمعادلة $x_{t+n}+a_1x_{t+n-1}+\cdots+a_{n-1}x_{t+1}+a_nx_t=0$ فإن $C_1x^{(1)}+C_2x^{(2)}$ هو ايضا حل لها بثوابت إختيارية C_1 و C_2.

نظرية:

إذا كان x_{CF} حل للمعادلة المتجانسة $x_{t+n}+a_1x_{t+n-1}+\cdots+a_{n-1}x_{t+1}+a_nx_t=0$

وكان x_{PS} حل للمعادلة غير المتجانسة

$x_{t+n}+a_1x_{t+n-1}+\cdots+a_{n-1}x_{t+1}+a_nx_t=r(t)$ فإن $x_{CF}+x_{PS}$ حل للمعادلة غير

المتجانسة $x_{t+n}+a_1x_{t+n-1}+\cdots+a_{n-1}x_{t+1}+a_nx_t=r(t)$.

General Solution of the Homogeneous الحل العام للمعادلة المتجانسة
: Equation

سوف نستعرض إيجاد الحل العام للمعادلة المتجانسة

$$x_{t+n}+a_1x_{t+n-1}+\cdots+a_{n-1}x_{t+1}+a_nx_t=0$$

بأمثلة كالتالي:

1) اوجد الحل العام للمعادلة المتجانسة

$$x_t-x_{t-2}=0$$

لنجرب الحل $x_t=\lambda^t,\quad \lambda\neq 0$ فنحصل على المعادلة المساعدة Auxiliary Equation

$$\lambda^t-\lambda^{t-1}=0$$
$$\lambda^{t-1}(\lambda-1)=0$$

وبما ان $\lambda\neq 0$ فإن المعادلة المساعدة لها جزرين متساويين $\lambda_1=\lambda_2=1$ ويكون الحل العام للمعادلة المتجانسة هو

$$\begin{aligned}x_t&=(C_1+C_2t)1^t\\&=C_1+C_2t\end{aligned}$$

ولها ثابتين إختيارين C_1 و C_2 يتم تحديدهم من الشروط الأولية.

2) اوجد الحل العام للمعادلة المتجانسة

$$x_t - 3x_{t-1} + 2x_{t-2} = 0$$

لنجرب الحل $x_t = \lambda^t, \quad \lambda \neq 0$ فنحصل على المعادلة المساعدة Auxiliary Equation

$$\lambda^t - 3\lambda^{t-1} + 2\lambda^{t-2} = 0$$
$$\lambda^{t-2}\left(\lambda^2 - 3\lambda + 2\right) = 0$$

وبما ان $\lambda \neq 0$ فإن المعادلة المساعدة تصبح $\left(\lambda^2 - 3\lambda + 2\right) = 0$ ولها الجزور $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ ويكون الحل العام للمعادلة المتجانسة هو

$$\begin{aligned} x_t &= C_1\lambda_1^t + C_2\lambda_2^t \\ &= C_1 + C_2 2^t \end{aligned}$$

ولها ثابتين إختيارين C_1 و C_2 يتم تحديدهم من الشروط الأولية.

3) اوجد الحل العام للمعادلة المتجانسة

$$x_t + 3x_{t-1} + x_{t-2} = 0$$

لنجرب الحل $x_t = \lambda^t, \quad \lambda \neq 0$ فنحصل على المعادلة المساعدة Auxiliary Equation

$$\lambda^t + 3\lambda^{t-1} + \lambda^{t-2} = 0$$
$$\lambda^{t-2}\left(\lambda^2 + 3\lambda + 1\right) = 0$$

وبما ان $\lambda \neq 0$ فإن المعادلة المساعدة تصبح $\left(\lambda^2+3\lambda+1\right)=0$ ولها الجزور

$\lambda_1=\frac{-3+\sqrt{5}}{2}, \lambda_2=\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$ ويكون الحل العام للمعادلة المتجانسة هو

$$\begin{aligned} x_t &= C_1\lambda_1^t + C_2\lambda_2^t \\ &= C_1\left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)^t + C_2\left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right)^t \end{aligned}$$

ولها ثابتين إختيارين C_1 و C_2 يتم تحديدهم من الشروط الأولية.

4) اوجد الحل العام للمعادلة المتجانسة

$$x_t + x_{t-1} + \tfrac{1}{4}x_{t-2} = 0$$

لنجرب الحل $x_t=\lambda^t, \quad \lambda \neq 0$ فنحصل على المعادلة المساعدة Auxiliary Equation

$$\begin{aligned} &\lambda^t + \lambda^{t-1} + \tfrac{1}{4}\lambda^{t-2} = 0 \\ &\lambda^{t-2}\left(\lambda^2+\lambda+\tfrac{1}{4}\right)=0 \end{aligned}$$

وبما ان $\lambda \neq 0$ فإن المعادلة المساعدة تصبح $\left(\lambda^2+\lambda+\tfrac{1}{4}\right)=0$ ولها الجزور

$\lambda_1=\lambda_2=-\tfrac{1}{2}$ ويكون الحل العام للمعادلة المتجانسة هو

$$\begin{aligned} x_t &= C_1\lambda_1^t + C_2\lambda_2^t \\ &= \left(C_1+C_2 t\right)\left(-\tfrac{1}{2}\right)^t \end{aligned}$$

ولها ثابتين إختيارين C_1 و C_2 يتم تحديدهم من الشروط الأولية.

5) اوجد الحل العام للمعادلة المتجانسة

$$x_t + x_{t-2} = 0$$

لنجرب الحل $x_t = \lambda^t,\quad \lambda \neq 0$ فنحصل على المعادلة المساعدة Auxiliary Equation

$$\lambda^t + \lambda^{t-2} = 0$$
$$\lambda^{t-2}\left(\lambda^2 + 1\right) = 0$$

وبما ان $\lambda \neq 0$ فإن المعادلة المساعدة تصبح $\left(\lambda^2 + 1\right) = 0$ ولها الجزور

$\lambda_1 = i = \sqrt{-1}, \lambda_2 = -i = -\sqrt{-1}$ ويكون الحل العام للمعادلة المتجانسة هو

$$\begin{aligned} x_t &= C_1 \lambda_1^t + C_2 \lambda_2^t \\ &= C_1 \cos\left(\frac{\pi t}{2} + C_2\right) \end{aligned}$$

ولها ثابتين إختيارين C_1 و C_2 يتم تحديدهم من الشروط الأولية.

ملاحظة: تحويل الأعداد المركبة إلى شكل قطبي Polar Form

يحول العدد المركب $a + bi$ إلى الشكل القطبى $r\left[\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right]$ بالتعويض التالي

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$\cos(\theta) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin(\theta) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad -\pi < \theta \leq \pi$$

تكتب

$$\lambda_1 = i = 0 + 1i$$
$$= r\left[\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right]$$
$$r = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$$
$$\cos(\theta) = \frac{0}{1} = 0, \quad \sin(\theta) = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

وبالمثل λ_2

ويكون الحل العام للمعادلة المتجانسة هو

$$x_t = Ar^t \cos(t\theta + C)$$

يترك للطالب كتمرين التعويض في المعادلة $x_t = Ar^t \cos(t\theta + C)$ لجعلها على الشكل $x_t = C_1 \cos\left(\frac{\pi t}{2} + C_2\right)$.

تمرين: للقيم الأولية $x_0 = 0, x_1 = 1$ برهن أن $x_t = \sin\frac{\pi t}{2}$ للحل السابق.

نتيجة: إذا كان

$$x_t + a_1 x_{t-1} + a_2 x_{t-2} = 0$$

حيث a_1 و a_2 ثوابت و $a_2 \neq 0$ وكان λ_1 و λ_2 جذري المعادلة المساعدة

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$$

فإن الحل العام للمعادلة الفروقية $x_t + a_1 x_{t-1} + a_2 x_{t-2} = 0$ يعطى بالعلاقات

$$x_t = C_1 \lambda_1^t + C_2 \lambda_2^t$$

وذلك إذا كان λ_1 و λ_2 حقيقين ومختلفين و

$$x_t = \left(C_1 + C_2 t\right) \lambda_1^t$$

وذلك إذا كان λ_1 و λ_2 حقيقين ومتساويين و

$$x_t = A r^t \cos\left(t\theta + C\right)$$

وذلك إذا كان λ_1 و λ_2 مركبين متقارنين أي على الشكل

$$\lambda_1 = a + bi = r\left[\cos\left(\theta\right) + i\sin\left(\theta\right)\right]$$
$$\lambda_2 = a - bi = r\left[\cos\left(\theta\right) - i\sin\left(\theta\right)\right]$$

الحل الخاص للمعادلة الكاملة Particular Solution of the Complete Equation :

سوف نستعرض إيجاد الحل الخاص للمعادلة الكاملة

$$x_{t+n} + a_1 x_{t+n-1} + \cdots + a_{n-1} x_{t+1} + a_n x_t = r(t)$$

بأمثلة كالتالي:

1) لنعتبر المعادلة

$$x_{t+2} - 3x_{t+1} + 2x_t = 3^t$$

سوف نحلها بطريقة المعاملات غير المحددة Method of Undetermined Coefficients كالتالي:

لنحاول ايجاد حل على الشكل $x_t^* = A3^t$ حيث المعامل الثابت A لم يحدد بعد. نحاول إيجاد قيمة لـ A (إن وجدت) يكون فيها x_t^* حلا ، نعوض

$$\begin{aligned} x_{t+2}^* - 3x_{t+1}^* + 2x_t^* &= A3^{t+2} - 3A3^{t+1} + 2A3^t \\ &= A3^t(9 - 9 + 2) \\ &= 2A3^t \end{aligned}$$

$$\therefore A = \frac{1}{2}$$

ويكون $x_t^* = \frac{1}{2}3^t$ الحل الخاص. سبق ان وجدنا الحل العام للمعادلة المتجانسة وهو الدالة المكملة للمعادلة الكاملة ، ويكون الحل العام للمعادلة الكاملة هو

$$x_t = C_1 + C_2 2^t + \tfrac{1}{2}3^t$$

ولها ثابتين إختيارين C_1 و C_2 يتم تحديدهم من الشروط الأولية.

2) لنعتبر المعادلة الأكثر تعميما

$$x_{t+2} - 3x_{t+1} + 2x_t = a^t$$

حيث a ثابت ما (المثال السابق حالة خاصة من هذا وذلك بأخذ $a=3$). كما في المثال السابق نأخذ الحل التجريبي $x_t^* = Aa^t$ ونعوض

$$\begin{aligned} x_{t+2}^* - 3x_{t+1}^* + 2x_t^* &= Aa^{t+2} - 3Aa^{t+1} + 2Aa^t \\ &= Aa^t\left(a^2 - 3a + 2\right) \\ &= A3^t\left(a-1\right)\left(a-2\right) \end{aligned}$$
$$\therefore A = \frac{1}{\left(a-1\right)\left(a-2\right)}, \quad a \neq 1,2$$

ويكون $a \neq 1,2$ $x_t^* = \dfrac{1}{\left(a-1\right)\left(a-2\right)}a^t,$ الحل الخاص. لاحظ ان جذور المعادلة المساعدة هي 1 و 2 . ماذا لوكانت $a=1$ أو $a=2$ أي مثلا لتكن

$$x_{t+2} - 3x_{t+1} + 2x_t = 1$$

لنجرب الحل $x_t^* = Aka^t$ وبوضع $a=1$ يكون $x_t^* = At$ ونعوض

$$\begin{aligned} x_{t+2}^* - 3x_{t+1}^* + 2x_t^* &= A\left(t+2\right) - 3A\left(t+1\right) + 2At \\ &= -A \end{aligned}$$
$$\therefore A = -1$$

ويكون الحل الخاص $x_t^* = -t$.

<u>تمرين:</u> في حالة $a = 2$ في المعادلة $x_{t+2} - 3x_{t+1} + 2x_t = a^t$ برهن ان $x_t^* = At2^t$ حلا خاص عندما $A = 1/2$ وان المعادلة الفروقية $x_{t+2} - 3x_{t+1} + 2x_t = 2^t$ لها الحل العام

$$x_t = C_1 + C_2 2^t + t2^{t-1}$$

3) اوجد الحل الخاص للمعادلة

$$8x_{t+2} - 6x_{t+1} + x_t = 5\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)$$

لنجرب الحل

$$x_t^* = A\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) + C\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)$$

حيث A و C معاملات ثابتة سيتم تحديدها، نعوض بالحل التجريبي

$$\begin{aligned} 8x_{t+2}^* - 6x_{t+1}^* + x_t^* = 8&\left[A\sin\left\{\frac{\pi(t+2)}{2}\right\} + C\cos\left\{\frac{\pi(t+2)}{2}\right\}\right] \\ &-6\left[A\sin\left\{\frac{\pi(t+1)}{2}\right\} + C\cos\left\{\frac{\pi(t+1)}{2}\right\}\right] \\ &+\left[A\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) + C\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right] \end{aligned}$$

وبإستخدام العلاقات المثلثية

$$\sin\left\{\frac{\pi(t+2)}{2}\right\}=\sin\left(\frac{\pi t}{2}+\pi\right)=-\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)$$

$$\cos\left\{\frac{\pi(k+2)}{2}\right\}=\cos\left(\frac{\pi t}{2}+\pi\right)=-\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)$$

$$\sin\left\{\frac{\pi(t+1)}{2}\right\}=\sin\left(\frac{\pi t}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)$$

$$\cos\left\{\frac{\pi(t+1)}{2}\right\}=\cos\left(\frac{\pi t}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)$$

ينتج

$$8x_{t+2}^{*}-6x_{t+1}^{*}+x_t^{*}=(-7A+6C)\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)+(-6A-7C)\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)$$

بمطابقة المعادلة هذه مع المعادلة الأصلية $8x_{t+2}-6x_{t+1}+x_t=5\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)$ نجد ان

$$-7A+6C=5$$
$$-6A-7C=0$$
$$A=-\frac{7}{17},\quad C=\frac{6}{17}$$

ويكون الحل الخاص

$$x_t^{*}=\frac{1}{17}\left[-7\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)+6\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right]$$

مناقشة:

من الأمثلة السابقة نستنتج ان شكل الحل الخاص يمكن إستنباطه من شكل الدالة $r(t)$، فطريقة المعاملات غير المحددة يمكن إستخدامها بنجاح إذا كانت الدالة $r(t)$ مجموع او حاصل ضرب تراكيب الخطية لدوال من الشكل $a^t, \sin(bt), \cos(bt), t^n$ حيث a و b اي ثوابت و n عدد صحيح موجب.

الجدول التالي يعطي شكل الدلة $r(t)$ والحل التجريبي المقترح

$r(t)$	x_t^*
a^t	Aa^t
$\sin(bt) / \cos(bt)$	$A\sin(bt) + C\cos(bt)$
t^n	$A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \cdots + A_n t^n$
$t^n a^t$	$a^t \left(A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \cdots + A_n t^n \right)$
$a^t \sin(bt) / a^t \cos(bt)$	$a^t \left[A\sin(bt) + C\cos(bt) \right]$

مثال:

أوجد الحل العام للمعادلة

$$x_{t+2}-4x_{t+1}+4x_t=3t+2^t$$

المعادلة المساعدة $\lambda^2-4\lambda+4=0$ لها الجذرين المكررة $\lambda_1=\lambda_2=2$ وعلية تكون الدالة الخاصة $x_{CF}=\left(C_1+C_2t\right)2^t$. الحل الخاص يستنتج من النظر الى الطرف الأيمن من المعادلة والإستعانة بالجدول فنجد انه على الشكل $x_t^*=A_0+A_1t+At^2 2^t$

ونحدد قيم A_0, A_1, A بالتعويض

$$x_{t+2}^*-4x_{t+1}^*+4x_t^*=\left(A_0-2A_1\right)+A_1t+8A2^t$$

بالمقارنة مع $x_{t+2}-4x_{t+1}+4x_t=3t+2^t$ نجد

$$A_0-2A_1=0,\quad A_1=3,\quad 8A=1$$

أي $A_0=6,\quad A_1=3,\quad A=\frac{1}{8}$ ويكون الحل العام

$$x_t=\left(C_1+C_2t\right)2^t+6+3t+\tfrac{1}{8}t^2 2^t$$

التصرف النهائى للحلول بإستخدام Excel :

سوف ندرس تصرف الحلول الناتجة من حل معادلة فروقية لقيم أولية معطاة وندرس التصرف النهائي للمتتابعات العددية على أمثلة مستخدمين Excel كالتالي:

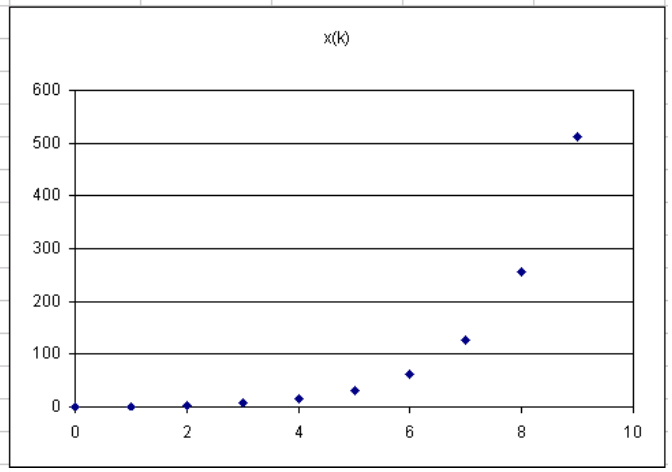
1) أدرس تصرف المعادلة الفروقية التالية

$$x_{t+2}-3x_{t+1}+2x_t=0$$

بقيم أولية $x_0=0, \quad x_1=1$ و $x_0=-1, \quad x_1=-2$ و $x_0=x_1=2$

الحل: للقيم الأولية $x_0=0, \quad x_1=1$

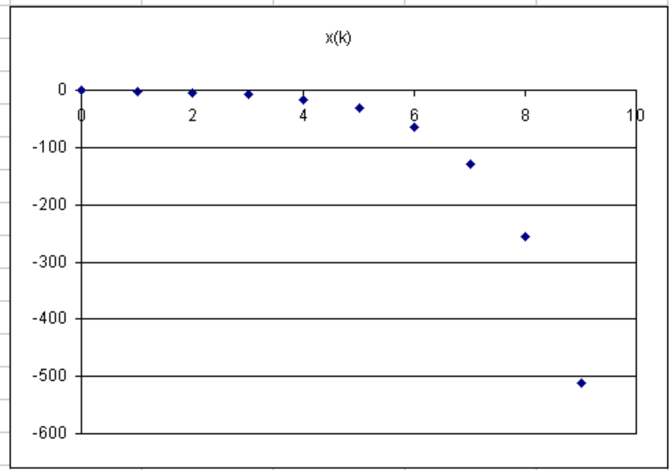
	A	B
1	k	x(k)
2	0	0
3	1	1
4	2	3
5	3	7
6	4	15
7	5	31
8	6	63
9	7	127
10	8	255
11	9	511
12	10	1023
13	11	2047
14	12	4095
15	13	8191



نلاحظ ان الحل يتباعد إلى ∞.

و للقيم الأولية $x_0=-1, \quad x_1=-2$

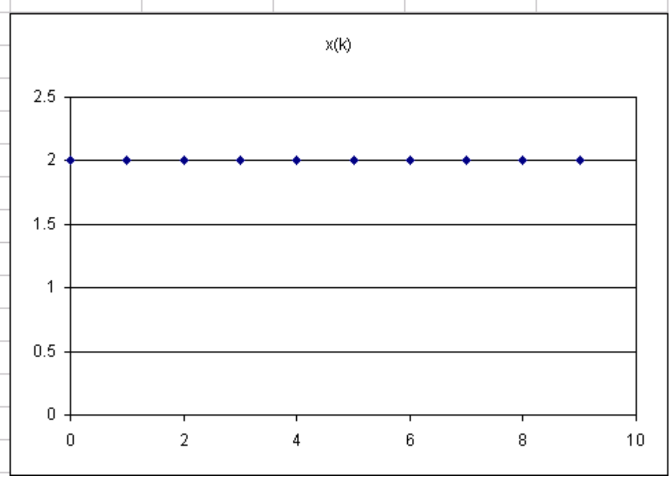
	A	B
1	k	x(k)
2	0	-1
3	1	-2
4	2	-4
5	3	-8
6	4	-16
7	5	-32
8	6	-64
9	7	-128
10	8	-256
11	9	-512
12	10	-1024
13	11	-2048
14	12	-4096
15	13	-8192



نلاحظ ان الحل يتباعد إلى $-\infty$.

و للقيم الأولية $x_0 = x_1 = 2$

	A	B
1	k	x(k)
2	0	2
3	1	2
4	2	2
5	3	2
6	4	2
7	5	2
8	6	2
9	7	2
10	8	2
11	9	2
12	10	2
13	11	2
14	12	2
15	13	2



نلاحظ ان الحل قيمة ثابتة و هذا ينطبق على جميع القيم الأولية $x_0 = x_1$.

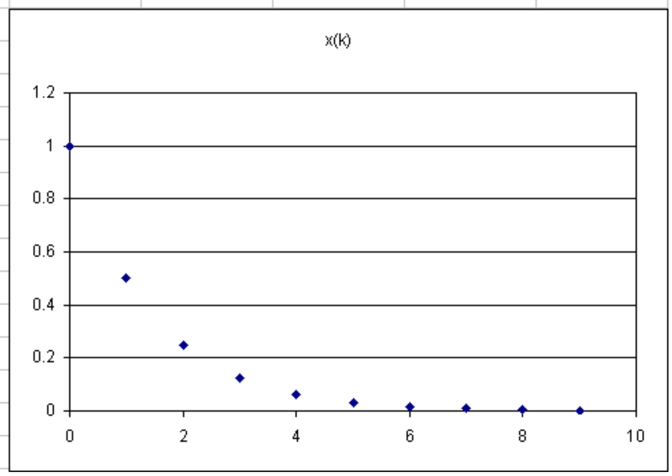
2) أدرس تصرف المعادلة الفروقية التالية

$$2x_{t+2} + 3x_{t+1} - 2x_t = 0$$

بقيم أولية $x_0=1,\quad x_1=\frac{1}{2}$ و $x_0=1,\quad x_1=-2$ و $x_0=2,\quad x_1=-\frac{3}{2}$.

الحل: للقيم الأولية $x_0=1,\quad x_1=\frac{1}{2}$

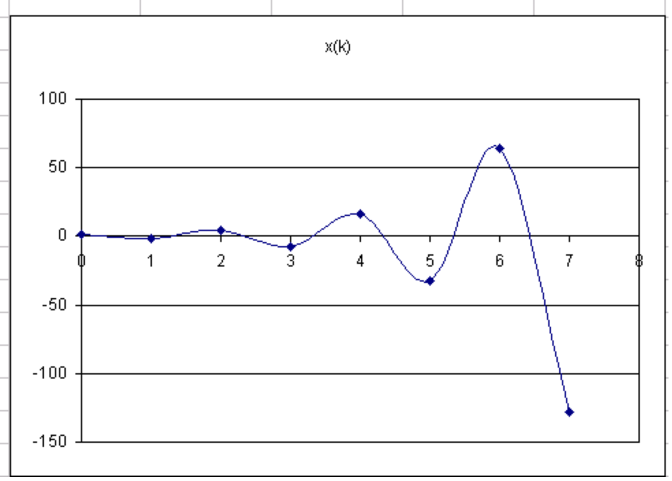
k	x(k)
0	1
1	0.5
2	0.25
3	0.125
4	0.0625
5	0.03125
6	0.015625
7	0.007813
8	0.003906
9	0.001953
10	0.000977
11	0.000488
12	0.000244
13	0.000122



نلاحظ ان الحل يتقارب إلى 0.

وللقيم الأولية $x_0=1,\quad x_1=-2$

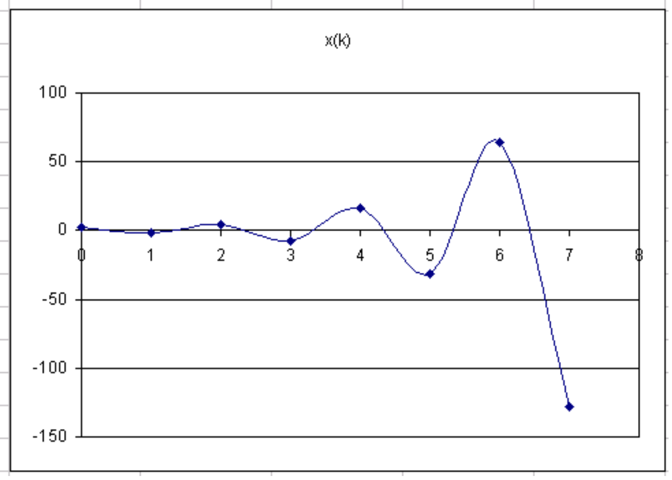
k	x(k)
0	1
1	-2
2	4
3	-8
4	16
5	-32
6	64
7	-128
8	256
9	-512
10	1024
11	-2048
12	4096
13	-8192



نلاحظ ان الحل يتباعد مترددا بين قيم موجبة وسالبة.

وللقيم الأولية $x_0 = 2, \quad x_1 = -\frac{3}{2}$

	A	B	C
1	k	x(k)	
2	0	2	
3	1	-1.5	
4	2	4.25	
5	3	-7.875	
6	4	16.0625	
7	5	-31.9688	
8	6	64.01563	
9	7	-127.992	
10	8	256.0039	
11	9	-511.998	
12	10	1024.001	
13	11	-2048	
14	12	4096	
15	13	-8192	



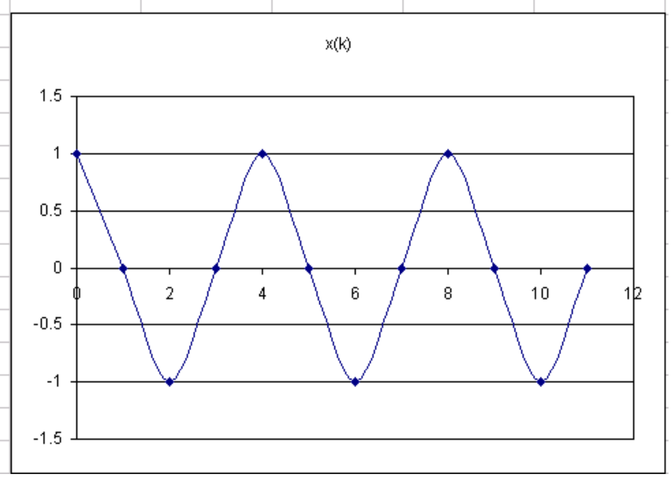
نفس التصرف النهائي السابق.

3) أدرس تصرف المعادلة الفروقية التالية

$$x_{t+2} + x_t = 0$$

بقيم أولية $x_0 = 1, \quad x_1 = 0$.

	A	B	C
1	k	x(k)	
2	0	1	
3	1	0	
4	2	-1	
5	3	0	
6	4	1	
7	5	0	
8	6	-1	
9	7	0	
10	8	1	
11	9	0	
12	10	-1	
13	11	0	
14	12	1	
15	13	0	



الحل يتردد محدودا.

لاحظ أن

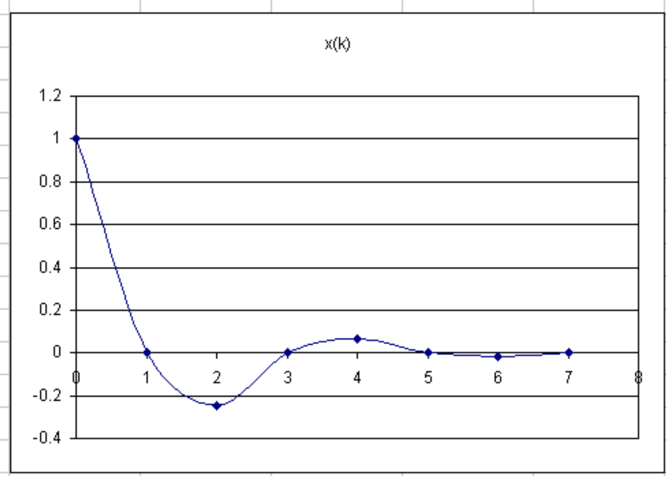
$$\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)=\begin{cases}1, & \text{if } t=0,4,8,12,\ldots\\ -1, & \text{if } t=2,6,10,14,\ldots\\ 0, & \text{if } t=1,3,5,7,\ldots\end{cases}$$

4) أدرس تصرف المعادلة الفروقية التالية

$$4x_{t+2}+x_t=0$$

بقيم أولية $x_0=1, \quad x_1=0$.

k	x(k)
0	1
1	0
2	-0.25
3	0
4	0.0625
5	0
6	-0.01563
7	0
8	0.003906
9	0
10	-0.00098
11	0
12	0.000244
13	0



الحل يتخامد جيبيا إلى 0.

لقد وجدنا الحل العام لهذه المعادلة سابقا وكان $x_t = A\left(\frac{1}{2}\right)^t \cos\left(\frac{\pi t}{2}+C\right)$ ولقيم أولية

$x_0 = 1, \quad x_1 = 0$ يصبح الحل العام $x_t = \left(\frac{1}{2}\right)^t \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)$. لاحظ ان $\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)$ يسبب

التردد و $\left(1/2\right)^t$ يسبب التخامد.

<u>مناقشة:</u>

1) إذا كانت متتابعة الحل متقاربة قد تظل ثابتة او تتزايد اوتتناقص ببطء او تتخامد جيبيا. أما إذا كانت متباعدة فإنها قد تتزايد بشكل مستمر إلى ∞ مالانهاية أو تتناقص بشكل مستمر إلى $-\infty$ أو تبدي ترددا مستمر نهائي او منفجرا لانهائي.

2) يعتمد تصرف متتابعة الحل على كل من المعادلة الفروقية والقيم الأولية.

3) جذور المعادلة المساعدة تعتبر من العوامل المهمة في تحديد التصرف النهائي للحل.

<u>ملاحظة هامة:</u>

لقد ذكرنا أن الحل العام x_{GS} للمعادلات التفاضلية والفروقية يتكون من الدالة المكملة x_{CF} والحل الخاص x_{PS} أي $x_{GS} = x_{CF} + x_{PS}$. التصرف النهائي للحل يعتمد على تصرف كل من x_{CF} و x_{PS} وغالبا مايكون تصرف x_{CF} مرحلي او إنتقالي Transient لفترة قصيرة ويضمحل ويتلاشى بعد فترة طويلة ويستمر في التأثير x_{PS}.

الفصل الثالث:

جبر وحساب المصفوفات Matrix Algebra and Calculus:

تعتبر المصفوفات من الأدوات المهمة جدا في التحليل الرياضي وبناء النماذج، ولهذا سوف نتطرق إلى القليل من جبر وحساب المصفوفات بما يخدم هذا المقرر.

تعرف المصفوفة على انها تركيب من الأشياء في شكل سطور وأعمدة. وعلى الخصوص للأعداد الحقيقية $a_{ij} \in \mathbb{R}$ تعرف المصفوفة A كالتالي:

$$A=\left[a_{ij}\right]=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

العمليات الأساسية على المصفوفات:

1- جمع مصفوفات

$$1\text{-}\ C=A+B \Rightarrow \quad c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$$

2- الضرب بعدد

$$2\text{-}\ C=\alpha A \Rightarrow \quad c_{ij}=\alpha a_{ij}$$

3- الضرب بمصفوفة

$$3\text{-}\ C=AB \Rightarrow \quad c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

4- معكوس (منقول) مصفوفة

4- $C = A^T \Rightarrow \quad c_{ij} = a_{ji}$

5- المصفوفة المربعة

5- $A = \left[a_{ij}\right], \quad i = 1,...,n; \quad j = 1,...,n$

6- مصفوفة الوحدة

6- $I_n = \left[e_k^{(n)}\right], \quad e_k^{(n)} = \left(0,...,0,1(\text{k th position}),0,...,0\right)^T$

7- مقلوب مصفوفة

7- $AB = I \Rightarrow \quad B = A^{-1}$

على شرط الاتكون A شاذة Singular

8- معكوس المقلوب

8- $\left(A^{-1}\right)^T = \left(A^T\right)^{-1} = A^{-T}$

9- محددة المصفوفة

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{1j} \det\left(A_{1j}\right)$$

حيث A_{1j} مصفوفة $(n-1)\times(n-1)$ نحصل عليها بحذف السطر الأول والعمود j من المصفوفة A.

<u>بعض الخواص المفيدة للمحددات:</u>

$(i)\det(AB)=\det(A)\det(B)$

$(ii)\det(A^T)=\det(A)$

$(iii)\det(cA)=c^n\det(A)$

$(iv)\det(A)\neq 0 \Leftrightarrow A$ is nonsingular

تعريف: متجه العمود هو عبارة عن مصفوفة $m\times 1$ أي $y=[y_i],\ \ i=1,2,...,m$.

إذا كان A مصفوفة و x متجه فإن $y=Ax$ يعني

$$y_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j,\quad i=1,2,...,m$$

تعريف: الضرب الخارجي للمتجهين $x=[x_i],\ \ i=1,...,m$ و $y=[y_j],\ \ j=1,...,n$ يعطى بالعلاقة

$$xy^T=\begin{bmatrix} x_1y_1 & \cdots & x_1y_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_my_1 & \cdots & x_my_n \end{bmatrix}$$

تعريف: الضرب الداخلي للمتجهين $x=[x_j],\ \ j=1,...,n$ و $y=[y_j],\ \ j=1,...,n$ يعطى بالعلاقة

$$x^Ty=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i=y^Tx$$

تعريف: التمثيل العمودي للمصفوفة A هو $A=\left[c_1,\ldots,c_n\right]$ حيث c_k العمود k في A.

تعريف: التمثيل السطري للمصفوفة A هو $A=\begin{bmatrix} r_1^T \\ \vdots \\ r_m^T \end{bmatrix}$ حيث r_k^T السطر k في A.

تعريف: يقال ان المصفوفة المربعة A متناظرة إذا كان $a_{ij}=a_{ji},\quad \forall i,j=1,\ldots,n\,, i\neq j$.

تعريف: يقال ان المصفوفة المربعة المتناظرة A متعامدة إذا تحقق

$$A^T A = AA^T = I$$

أو

$$A^{-1}=A^T$$

أي

$$c_k^T c_j = 0,\quad ,k=1,\ldots,n\,;\, j=1,\ldots,n, k\neq j$$

أو

$$r_k r_j^T = 0,\quad k=1,\ldots,n\,;\, j=1,\ldots,n, k\neq j$$

تعريف: إذا كانت $1\le i_1<\cdots<i_r\le m$ و $1\le j_1<\cdots<j_s\le n$ فإن المصفوفة $B=\left[b_{pq}\right],\quad p=1,\ldots,r\,; q=1,\ldots,s$ المعرفة بالعلاقة $b_{pq}=a_{i_p j_q}$ هي مصفوفة

جزئية Submatrix من A، وإذا كانت $r=s$ و $i_p=j_p$ لقيم $p=1,\dots,r$ فإن B مصفوفة جزئية رئيسية Principal Submatrix وإذا كان إضافة على ذلك $i_p=j_p=p$ لقيم $p=1,\dots,r$ فإن B مصفوفة جزئية رئيسية متقدمة Leading Principal Submatrix.

تعريف: المصفوفة القطرية Diagonal Matrix وهي مصفوفة مربعة يكون فيها أي $a_{ij}=0,\quad \forall i\neq j$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & a_{ii} & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

ويرمز لها $A=\operatorname{diag}\left(a_{ii}\right),\quad i=1,\dots,n$.

<u>تعريف: القيم المميزة</u> <u>Eigenvalues</u> لمصفوفة مربعة A هي مجموعة من القيم $\left\{\lambda_1,\dots,\lambda_n\right\}$ والتي تحقق المعادلة

$$\det\left(A-\lambda_i I\right)=0,\quad \forall i=1,\dots,n$$

<u>تعريف: المتجهات المميزة Eigenvectors</u> لمصفوفة مربعة A هي مجموعة من المتجهات التابعة للقيم المميزة $\left\{\lambda_1,\dots,\lambda_n\right\}$ والتي تحقق

$$Av_i = \lambda_i v_i, \quad \forall i = 1,\ldots,n$$

أو

$$\left(A - \lambda_i I\right)v_i = 0, \quad \forall i = 1,\ldots,n$$

تعريف: القيمة المميزة ومتجة مميز تابع لها يسميان الزوج المميز.

تعريف: مصفوفة القياس Modal Matrix التابعة للمصفوفة المربعة A هي المصفوفة التي تتكون اعمدتها من متجهات مميزة للمصفوفة A والتي تحقق

$$A = M\Lambda M^{-1}$$

حيث $\Lambda = \text{diag}\left(\lambda_i\right)$ هي المصفوفة القطرية المكونة عناصرها من القيم المميزة للمصفوفة A.

لاحظ أن $AM = M\Lambda$.

مثال: أوجد القيم المميزة ومتجهات مميزة ومصفوفة قياس للمصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$\det\left(A - \lambda I\right) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & -3 & 4 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -2 & -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)\begin{vmatrix}-2-\lambda & 4\\ -2 & 4-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)\left(\lambda^2-2\lambda\right)=0$$

$$\therefore \lambda^T=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\end{bmatrix}$$

$$\Lambda=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

نوجد المتجهات المميزة ومصفوفة القياس كالتالي

$$(A-\lambda_i I)v_i=\begin{bmatrix}-2-\lambda_i & -3 & 4\\ 0 & 1-\lambda_i & 0\\ -2 & -2 & 4-\lambda_i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{i1}\\ v_{i2}\\ v_{i3}\end{bmatrix}=0$$

$$\lambda_1=1\Rightarrow\begin{bmatrix}-3 & -3 & 4\\ 0 & 0 & 0\\ -2 & -2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{11}\\ v_{12}\\ v_{13}\end{bmatrix}=0\Rightarrow v_1=\begin{bmatrix}1\\ -1\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\lambda_2=2\Rightarrow\begin{bmatrix}-4 & -3 & 4\\ 0 & -1 & 0\\ -2 & -2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{21}\\ v_{22}\\ v_{23}\end{bmatrix}=0\Rightarrow v_1=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$$

$$\lambda_3=0\Rightarrow\begin{bmatrix}-2 & -3 & 4\\ 0 & 1 & 0\\ -2 & -2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{31}\\ v_{32}\\ v_{33}\end{bmatrix}=0\Rightarrow v_1=\begin{bmatrix}2\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$$

$$M=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

تمرين: تحقق أن $AM=M\Lambda$ و $A=M\Lambda M^{-1}$.

<u>**تعريف: رفع مصفوفة مربعة لقوة**</u> A^k حيث k عدد صحيح غير سالب يحسب كالتالي:

$$A^k = M\Lambda^k M^{-1}$$

و $\Lambda^k = \mathrm{diag}\left(\lambda_i^k\right)$.

تعريف: أثر Trace المصفوفة المربعة A هو

$$\mathrm{tr}\left(A\right) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

يمكن برهنة أن:

$$\mathrm{tr}\left(A\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

و

$$\det\left(A\right) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

ملاحظات:

1) لاحظ أن $\left(A-\lambda I\right)$ مصفوفة شاذة ولهذا لايوجد متجه وحيد v_i يحقق $\left(A-\lambda_i I\right)v_i = 0$ لكل λ_i فإذا كان v_i متجه مميز تابع للقيمة المميزة λ_i فكذلك αv_i حيث $\alpha \neq 0$ وهذا يوضح ان أهمية المتجه المميز تكون في إتجاهه وليس مقداره.

2) هناك نوعين من المتجهات المميزة اليمينية واليسارية Right and Left Eigenvectors التابعة للقيم المميزة $\left\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\right\}$، سبق أن عرفنا المتجه المميز اليميني بالعلاقة $Av_i = \lambda_i v_i, \quad \forall i = 1,\ldots,n$ والذي حصلنا عليها من $AM = M\Lambda$،

المتجه المميز اليساري يعرف من العلاقة $u_i^T A v_i = u_i^T \lambda_i, \;\; \forall i = 1,...,n$ أو

$u_i^T \left(A - \lambda_i I \right) = 0, \;\; \forall i = 1,...,n$ والذي نحصل عليه من العلاقة $M^{-1} A = \Lambda M^{-1}$

فإذا كانت أعمدة M تتكون من v_i فإن سطور M^{-1} تتكون من u_i^T. لاحظ أن القيم

المميزة وحيدة.

<u>تعريف: رفع e لقوة مصفوفة مربعة</u>

$$\begin{aligned} e^{At} &= I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \cdots \\ &= M \,\mathrm{diag}\left(e^{\lambda_i t} \right) M^{-1} \end{aligned}$$

<u>تفكيك القيمة الشاذة Singular Value Decomposition (SVD) :</u>

إذا كانت $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ فإنه يوجد مصفوفتين متعامدتين

$$U = \left[u_1,...,u_m \right] \in \mathbb{R}^{m \times m}$$

و

$$V = \left[v_1,...,v_n \right] \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

بحيث

$$U^T A V = \mathrm{diag}\left(\sigma_1,...,\sigma_p \right), \quad p = \min(m,n)$$

و بحيث $0 \ge \sigma_p \ge \cdots \ge \sigma_2 \ge \sigma_1$. تسمي σ_i القيم الشاذة للمصفوفة A والمتجهات u_i

و v_i المتجه i الأيسر الشاذ والمتجه i الأيمن الشاذ على التوالي.

حساب المصفوفات Matrix Calculus :

لتكن $A(t)=\left[a_{ij}(t)\right]$ و $B(t)=\left[b_{ij}(t)\right]$ مصفوفات تعتمد على المتغير t بحيث

عناصرها $a_{ij}(t)$ و $b_{ij}(t)$ تكون دوال قابلة للإشتقاق.

تعريف: مشتقة المصفوفة

$$\frac{d}{dt}A(t)=\left[\frac{d}{dt}a_{ij}(t)\right]$$

تعريف: تكامل المصفوفة

$$\int A(t)\,dt=\left[\int a_{ij}(t)\,dt\right]$$

تعريف: قاعدة الضرب

$$\frac{d}{dt}A(t)B(t)=A(t)\left(\frac{d}{dt}B(t)\right)+\left(\frac{d}{dt}A(t)\right)B(t)$$

$$\int A(t)\left(\frac{d}{dt}B(t)\right)dt=A(t)B(t)\Big|_{\text{limits}}-\int\left(\frac{d}{dt}A(t)\right)B(t)\,dt$$

تعريف: مشتقة المعكوس

$$\frac{d}{dt}A^{-1}(t)=-A^{-1}(t)\left(\frac{d}{dt}A(t)\right)A^{-1}(t)$$

إذا كانت $A=\left[a_{ij}\right]$ و $C=\left[c_{ij}\right]$ مصفوفات ثابتة فإن

$$\frac{d}{dt}e^{At}=Ae^{At}$$
$$\int e^{At}dt=A^{-1}e^{At}+C$$

الفصل الرابع:

تمثيل فضاء الحالة State Space Representation :

معادلات فضاء الحالة وحلها في المجال الزمني The State Space Equations and their Time Domain Solution :

سوف نركز هنا على ثلاثة نقاط هي:

1- التمثيل العام لمتغير الحالة في الأنظمة الحركية ويسمى شكل فضاء الحالة القياسي.

2- طرق وضع الأنظمة العامة على الشكل القياسي.

3- طرق ايجاد حل لمعادلات الحالة في المجال الزمني.

يستخدم تمثيل فضاء الحالة لمعالجة الأنظمة الحركية بواسطة متغيرات الحالة State Variables ووضعها في شكل فضاء الحالة القياسي Standard State Space Form .

الشكل العام لمتغير الحالة لنظام حركي مستمر يكتب للدوال المتجه x, y, u, f, g والمصفوفات الثابتة A, C, D على الشكل

$$\frac{d}{dt}x(t)=Ax(t)+f(x,t)+Bu(t)$$
$$y(t)=Cx(t)+Du(t)$$

حيث $f(x,t)$ تحوي كل المعاملات المتغيرة والحدود غير الخطية. مصفوفة النظام A يجب أن تكون مربعة والمصفوفات B و C و D يمكن ان يكون لها اي شكل عام.

مثال1:

ضع معادلة النظام من الدرجة الثانية التالية في شكل قياس

$$\frac{d}{dt}x_1(t)=7x_1(t)+3x_2(t)+4tx_1(t)+x_1(t)x_2(t)-u_1(t)+2u_3(t)$$
$$\frac{d}{dt}x_2(t)=9x_1(t)-5x_2(t)-3x_2^2(t)+4u_2(t)$$
$$y(t)=x_1(t)+x_2(t)-2u_2(t)$$

الحل:

$$\frac{d}{dt}x(t)=Ax(t)+f(x,t)+Bu(t)$$
$$y(t)=c^T x(t)+d^T u(t)$$

حيث

$$x(t)=\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix},\quad u(t)=\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{bmatrix}$$
$$A=\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 9 & -5 \end{bmatrix},\quad f(x,t)=\begin{bmatrix} 4tx_1(t)+x_1(t)x_2(t) \\ -3x_2^2(t) \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$
$$c^T=\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix},\quad d^T=\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

التحويل الى شكل الحالة:

هدفنا هنا هو إعطاء طريقة لتحويل بعض الأنظمة إلى شكل الحالة وعلى الخصوص تمثيل فضاء الحالة لأنظمة من الدرجة n والمعادلات التفاضلية والجبرية المختلطة وتحويل الأنظمة غير خطية إلى خطية.

1- تحويل المعادلات التفاضلية الخطية من الدرجة n:

معطى النظام التالي من الدرجة n

$$\frac{d^n}{dt^n}y(t)+a_1\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y(t)+\cdots+a_{n-1}\frac{d}{dt}y(t)+a_ny(t)=$$
$$b_0\frac{d^n}{dt^n}u(t)+b_1\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}u(t)+\cdots+b_{n-1}\frac{d}{dt}u(t)+b_nu(t)$$

نضع

$$\begin{aligned}
x_1(t)&=y(t)-\beta_0u(t)\\
x_2(t)&=\frac{d}{dt}y(t)-\beta_0\frac{d}{dt}u(t)-\beta_1u(t)=\frac{d}{dt}x_1(t)-\beta_1u(t)\\
x_3(t)&=\frac{d^2}{dt^2}y(t)-\beta_0\frac{d^2}{dt^2}u(t)-\beta_1\frac{d}{dt}u(t)-\beta_2u(t)=\frac{d}{dt}x_2(t)-\beta_2u(t)\\
&\vdots\\
x_j(t)&=\frac{d^{j-1}}{dt^{j-1}}y(t)-\beta_0\frac{d^{j-1}}{dt^{j-1}}u(t)-\beta_1\frac{d^{j-2}}{dt^{j-2}}u(t)-\cdots-\beta_{j-1}u(t)=\frac{d}{dt}x_{j-1}(t)-\beta_{j-1}u(t)
\end{aligned}$$

حيث

$$\begin{aligned}
\beta_0&=b_0\\
\beta_1&=b_1-a_1\beta_0\\
\beta_2&=b_2-a_1\beta_1-a_2\beta_0\\
&\vdots\\
\beta_j&=b_j-a_1\beta_{j-1}-\cdots-a_{j-1}\beta_1-a_j\beta_0
\end{aligned}$$

وهكذا نحصل على

$$\frac{d}{dt}x(t)=Ax(t)+bu(t)$$
$$y(t)=c^T x(t)+du(t)$$

حيث

$$x(t)=\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix},\ b=\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix},\ c^T=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \end{bmatrix},\ d=\beta_0=b_0$$

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}$$

<u>مثال2:</u>

حول المعادلة التالية إلى تمثيل فضاء الحالة

$$\frac{d^3}{dt^3}y(t)+6\frac{d^2}{dt^2}y(t)-8\frac{d}{dt}y(t)+4y(t)=2\frac{d}{dt}u(t)+7u(t)$$

مستخدمين الطريقة السابقة بتعويض

$$x_j(t)=\frac{d}{dt}x_{j-1}(t)-\beta_{j-1}u(t)$$

نجد

$$x_1(t)=y(t)-\beta_0 u(t)=y(t)$$
$$x_2(t)=\frac{d}{dt}y(t)-\beta_0\frac{d}{dt}u(t)-\beta_1 u(t)=\frac{d}{dt}y(t)$$
$$x_3(t)=\frac{d^2}{dt^2}y(t)-\beta_0\frac{d^2}{dt^2}u(t)-\beta_1\frac{d}{dt}u(t)-\beta_2 u(t)=\frac{d^2}{dt^2}y(t)-2u(t)$$

وكذلك

$$\beta_j=b_j-a_1\beta_{j-1}-\cdots-a_1\beta_0$$
$$\beta_0=b_0=0$$
$$\beta_1=b_1-a_1\beta_0=0$$
$$\beta_2=b_2-a_1\beta_1-a_2\beta_0=2$$
$$\beta_3=b_3-a_1\beta_2-a_2\beta_1-a_3\beta_0=7-6(2)-5$$

وبالتعويض في المعادلة التفاضلية نجد

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\x_3(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-4&8&-6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\x_3(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\2\\-5\end{bmatrix}u(t)$$
$$y(t)=\begin{bmatrix}1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\x_3(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\end{bmatrix}u(t)$$

تحويل نظام من الدرجة 3 إلى شكل الحالة:

معطى

$$\frac{d^3}{dt^3}y(t)+a_1\frac{d^2}{dt^2}y(t)+a_2\frac{d}{dt}y(t)+a_3y(t)=u(t)$$

حول هذا النظام الى شكل حالة، ملاحظا ان الطرف الأيمن لايحوى مشتقات $u(t)$. بين ايضا ان القيم المميزة لمصفوفة النظام الناتجة متطابقة مع جذور المعادلة المساعدة الناتجة من حل المعادلة المتجانسة التابعة للمعادلة المعطاة.

الحل: لهذه الحالة لنعوض الكميات

$$x_1(t)=y(t)$$
$$x_2(t)=y'(t)=\frac{d}{dt}x_1(t)=x_1'(t)$$

وبشكل عام

$$x_j(t)=\frac{d}{dt}x_{j-1}(t)$$

مع $x_1(t)=y(t)$ الآن من المعادلة المعرفة بوضع $y'''('t)=\frac{d}{dt}x_3(t)=x_3'(t)$ نجد

$$\frac{d}{dt}x_3(t)=-a_1x_3(t)-a_2x_2(t)-a_3x_1(t)+u(t)$$

وهكذا فإن المعادلات في $x_1'(t)$ و $x_2'(t)$ و $x_3'(t)$ توضع على شكل مصفوفي كالتالي

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

و

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u(t)$$

المعادلة المساعدة للمعادلة المتجانسة هي

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0$$

والقيم المميزة لمصفوفة الحالة تعطى من حل

$$\det\left(A - \lambda I\right) = 0$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

وبفك المحددة بالسطر الأول نجد

$$\begin{aligned} -\lambda\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -a_2 & -a_1 - \lambda \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -a_3 & -a_1 - \lambda \end{vmatrix} \\ = -\lambda\left(\lambda^2 + a_1\lambda + a_2\right) - 1\left(a_3\right) \\ = \lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0 \end{aligned}$$

وهي نفس النتيجة التي حصلنا عليها سابقا أي ان القيم المميزة لمصفوفة الحالة لنظام خطي مستقر تتطابق مع جذور المعادلة المساعدة للمعادلة المتجانسة.

2- حالة المعادلات التفاضلية والجبرية المختلطة :

ضع النظام التالي على شكل فضاء الحالة القياسي

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}x_1(t)+\frac{d}{dt}x_2(t) &= -4x_1(t) + x_4(t)+x_5(t)+u(t)\\
\frac{d}{dt}x_2(t) &= x_2(t)-5x_3(t) + 3u(t)\\
0 &= x_3(t)+x_4(t)\\
0 &= x_1(t)-3x_2(t)+x_3(t) + 7u(t)\\
0 &= x_1(t)-x_2(t) + x_5(t)
\end{aligned}
$$

لنكتب هذه المعادلات على الشكل المصفوفي

$$
\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \frac{d}{dt}x_1(t)\\ \frac{d}{dt}x_2(t)\\ \frac{d}{dt}x_3(t)\\ \frac{d}{dt}x_4(t)\\ \frac{d}{dt}x_5(t) \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -5 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 1 & -3 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\\ x_4(t)\\ x_5(t) \end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix} 1\\ 3\\ 0\\ 7\\ 0 \end{bmatrix} u(t)
$$

لنقسم المصفوفات كالتالي

$$\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{d}{dt}x_1(t)\\ \frac{d}{dt}x_2(t)\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}\frac{d}{dt}x_3(t)\\ \frac{d}{dt}x_4(t)\\ \frac{d}{dt}x_5(t)\end{bmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\begin{matrix}-4 & 0\\0 & 1\end{matrix} & \begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\-5 & 0 & 0\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}0 & 0\\1 & -3\\1 & -1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}x_3(t)\\x_4(t)\\x_5(t)\end{bmatrix}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}0\\7\\0\end{bmatrix}\end{bmatrix}u(t)$$

لقد اصبحت على الشكل

$$\begin{bmatrix}E_{11} & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{d}{dt}x_d(t)\\ \frac{d}{dt}x_a(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C_{11} & C_{12}\\C_{21} & C_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_d(t)\\x_a(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b_d\\b_a\end{bmatrix}u(t)$$

والتي لها الحل

$$\frac{d}{dt}x_d(t)=Ax_d(t)+wu(t)$$

حيث

$$A=E_{11}^{-1}\left(C_{11}-C_{12}C_{22}^{-1}C_{21}\right)$$
$$w=E_{11}^{-1}\left(b_d-C_{12}C_{22}^{-1}b_a\right)$$

3- تحويل الأنظمة غير خطية إلى خطية:

أوجد تقريب خطي للنظام

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ -1 & -3\end{bmatrix},\quad f=\begin{bmatrix}x_2^2(t)\\ 0\end{bmatrix},\quad bu(t)=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}u(t)$$

سوف نأخذ حالة المرجع Reference State نقطة التوازن Equilibrium Point

$dx_0(t)/dt=0$ مع $u_0(t)$.

الحل:

سوف نفك النظام حول $x_0(t)$ و $u_0(t)$ ونحدد الحالة المرجع وهي

$$\frac{d}{dt}x_0(t)=0$$
$$Ax_0(t)+f\left(x_0(t),u_0(t)\right)+0=0$$

أو

$$0=-x_{10}(t)+2x_{20}(t)+x_{20}^2(t)$$
$$0=-x_{10}(t)-3x_{20}(t)$$

وبإعادة الترتيب نجد

$$x_{10}(t)=-3x_{20}(t)$$
$$3x_{20}(t)+2x_{20}(t)+x_{20}^2(t)=\left(5+x_{20}(t)\right)x_{20}(t)=0$$

وهكذا حالتي الإستقرار هي

$$x_{10}(t)=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix},\quad x_{20}(t)=\begin{bmatrix}15\\-5\end{bmatrix}$$

المصفوفة الجاكوبية Jacobian Matrix التابعة لمتجه الحالة يمكن التعبير عنه علما بأن $J_{u(t)}=0$

$$J_{x(t)}=\left.\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1(t)}f_1(x(t),u(t)) & \frac{\partial}{\partial x_2(t)}f_1(x(t),u(t))\\ \frac{\partial}{\partial x_1(t)}f_2(x(t),u(t)) & \frac{\partial}{\partial x_2(t)}f_2(x(t),u(t))\end{bmatrix}\right|_{x_0(t),u_0(t)}=\left.\begin{bmatrix}0 & 2x_2(t)\\0 & 0\end{bmatrix}\right|_{x_0(t),u_0(t)}$$

للحالة المرجع مع $x_0^T(t)=\begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}$ النظام الخطي (الذي جعل خطيا) هو

$$\frac{d}{dt}\delta x(t)=\begin{bmatrix}-1 & 2\\-1 & 3\end{bmatrix}\delta x(t)+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\delta u(t)$$

وللحالة المرجع $x_0^T(t)=\begin{bmatrix}15 & -5\end{bmatrix}$ النظام الخطي هو

$$\frac{d}{dt}\delta x(t)=\begin{bmatrix}-1 & -8\\-1 & -3\end{bmatrix}\delta x(t)+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\delta u(t)$$

هذه الأنظمة الخطية المستقرة تمثل تقريب خطي للنظام الأصلي حول حالات اولية مختلفة.

حل الأنظمة الخطية المستقرة:

الأنظمة الخطية المستقرة المتجانسة:

سوف نقارن بين الحل لمعادلة في متغير عادي Scalar بمعادلة لمتغير مصفوفي (متجة)

الحالة العادية:

$$\frac{d}{dt}x(t)=ax(t), \quad x_0(0)=x_0$$

بالطرق السابقة لحل المعادلات التفاضلية نجد الحل

$$x(t)=x_0e^{at}$$

الحالة المصفوفية:

$$\frac{d}{dt}x(t)=Ax(t), \quad x_0(0)=x_0$$

بنفس الطريقة الحل هو

$$x(t)=e^{At}x_0$$

المصفوفة e^{At} تسمى مصفوفة إنتقال الحالة State Transition Matrix

خواص مصفوفة إنتقال الحالة:

1. $\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At} = e^{At}A$
2. $\int e^{At}dt = A^{-1}e^{At} = e^{At}A^{-1}$
3. $e^{A(t+\tau)} = e^{At}e^{A\tau}$
4. $let\ \tau = -t,\quad e^{A(t+\tau)} = e^{At}e^{-At} = I \quad or \quad \left[e^{At}\right]^{-1} = e^{-At}$
5. $e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt},\quad if \quad AB = BA$

<u>الأنظمة الخطية المستقرة غيرالمتجانسة:</u>

<u>الحالة العادية:</u>

$$\frac{d}{dt}x(t) - ax(t) = bu(t)$$

بالطرق السابقة لحل المعادلات التفاضلية نجد الحل

$$x(t) = x_0e^{at} + \int_0^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)\,d\tau$$

<u>الحالة المصفوفية:</u>

$$\frac{d}{dt}x(t) - Ax(t) = Bu(t)$$

بنفس الطريقة الحل هو

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau$$

تمثيل فضاء الحالة للمعادلات الفروقية:

تمثيل فضاء الحالة للمعادلات الفروقية أسهل بكثير من نظيره للمعادلات التفاضلية كما ان حل النظام الناتج يتم عن طريق حل تكراري للنظام ويستخدم برنامج مثل Excel لإيجاد الحل كما سنرى لاحقا.

توضع أي معادلة فروقية من أي درجة بشكل تمثيل فضاء الحالة كالتالي:

$$x_{t+1} = Gx_t + Hu_t$$

حيث x_t متجه الحالة عند التكرار k و G مصفوفة الحالة (مربعة) و H مصفوفة حدود غير التجانس.

مثال1:

حول المعادلة الفروقية التالية من الدرجة الثانية ومتغير حالة إلى معادلتين من الدرجة الأولى ومتغيري حالة.

$$x_{t+2} + 5x_{t+1} - 7x_t = 2t$$

الحل:

نضع أولا المعادلة على الشكل:

$$x_{t+2} = -5x_{t+1} + 7x_t + 2t$$

ضع $x_{t+1} = y_t$ فينتج

$$x_{t+1} = y_t$$
$$y_{t+1} = -5y_t + 7x_t + 2t$$

أي

$$\begin{bmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} t$$

وهي على الشكل $x_{t+1} = Gx_t + Hu_t$ حيث

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}$$

و

$$H = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

لقيم أولية $x_0 = 1, \quad y_0 = 1$ أوجد حل للنظام السابق

<u>الحل بإستخدام Excel:</u>

أدخل التالي:

	A	B	C
1	k	x(k)	y(k)
2	0	1	1
3	1	=C2	=-5*C2+7*B2+2*A3
4	2	=C3	=-5*C3+7*B3+2*A4
5	3	=C4	=-5*C4+7*B4+2*A5
6	4	=C5	=-5*C5+7*B5+2*A6
7	5	=C6	=-5*C6+7*B6+2*A7
8	6	=C7	=-5*C7+7*B7+2*A8

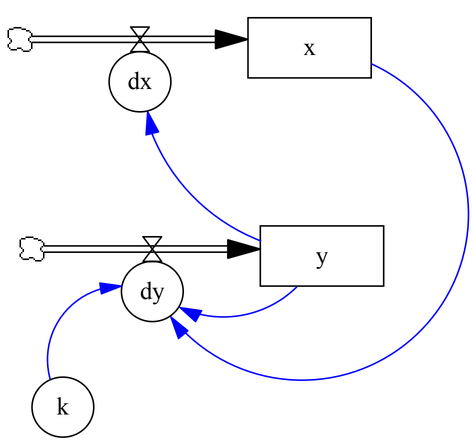
نجد

	A	B	C
1	k	x(k)	y(k)
2	0	1	1
3	1	1	4
4	2	4	-9
5	3	-9	79
6	4	79	-450
7	5	-450	2813
8	6	2813	-17203

أهمية تمثيل فضاء الحالة هو سهولة برمجتها في برامج تحليل ومحاكاة الأنظمة الحركية مثل برنامج Vensim و STELLA وغيرها.

تمثيل فضاء الحالة للمعادلات الفروقية بواسطة Vensim:

<u>تمثيل النظام السابق بواسطة Vensim :</u>




```
dx = y

dy = -5*y+7*x+2*k

k = LOOKUP( [(0,0)-(10,10)],(0,0),(1,1),(10,10))
```

```
x = INTEG ( dx,      1)

y = INTEG ( dy,      1)
```